

# Value at Risk – Evaluierung verschiedener Verfahren<sup>1)</sup>

Gabriela de Raaji,  
Burkhard Raunig

## 1 Einleitung

Im letzten Jahrzehnt haben immer wieder einzelne Finanzinstitute spekulative Verluste erlitten. Die meisten dieser finanziellen Verluste hätten im Fall funktionierender interner Kontrollen und eines entsprechenden Risikomeßsystems vermieden werden können. Diese Ereignisse, die großes öffentliches Interesse erweckten, verstärkten die Notwendigkeit der Entwicklung eines sinnvollen Risikomaßes, das die Grundlage für die Risikokontrolle und Risikosteuerung von Finanzinstituten bilden sollte. Wünschenswert war die Entwicklung bzw. Anwendung von statischen Kennzahlen, die die Quantifizierung und den Vergleich des Risikos zwischen verschiedenen Organisationsbereichen (z. B. Handelstischen, Abteilungen usw.) ermöglichen. Aus Sicht der Regulatoren stand das Ziel der Stärkung der Finanzstabilität im Vordergrund.

Im Zuge dieser Ereignisse wurde einem Konzept zur Ermittlung einer Risikomeßzahl für das Marktrisiko, dem Value-at-Risk-Konzept, große Bedeutung beigemessen. Was versteht man nun unter Value at Risk (VaR)? Als Value at Risk wird der Verlust bezeichnet, der – bezogen auf eine bestimmte Haltedauer und auf ein bestimmtes Konfidenzniveau – bei einem bestimmten Portfolio maximal eintreten kann. Eine genauere Definition wird im folgenden Absatz gegeben.

Mit  $P$  wird der Wert eines Portfolios bezeichnet, das aus  $m$  Finanzprodukten  $F_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) besteht. Die Wertveränderungen des  $j$ -ten Finanzproduktes  $\Delta F_j$  sind von den zugrundeliegenden  $n$  Risikofaktoren  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) abhängig. Diese Risikofaktoren sind stochastische Variablen, z. B. individuelle Aktienpreise, Zinssätze zu bestimmten Laufzeiten, Wechselkurse usw. Die Portfolioveränderung  $\Delta P$  (Gewinn oder Verlust) über einen bestimmten Zeitraum (Haltedauer) ist eine Funktion der Preisveränderungen der einzelnen Produkte  $F_j$  und somit eine Funktion der zugrundeliegenden Risikofaktoren:  $\Delta P(r_1, \dots, r_n) = \sum_m \Delta P_m(r_1, \dots, r_n)$ . Bezeichnet man mit  $F(\Delta P)$  die Verteilungsfunktion der Veränderungen des Marktwerts des Portfolios, dann ist der VaR definiert als:

$$\text{VaR} = F^{-1}(p) \quad (1)$$

wobei  $p$  eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) und  $F^{-1}(p)$  die inverse Funktion von  $F(\cdot)$  ist. Laut dieser Definition sollten Verluste, die größer als die geschätzte VaR-Zahl sind, höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p$  auftreten.

International ist inzwischen der Einsatz von VaR-Modellen in Finanzinstituten, aber auch in anderen Unternehmen weit verbreitet. Entscheidend für diese Entwicklung war, daß es nun in vielen Ländern möglich ist, das Eigenkapitalerfordernis, das zur Abdeckung des Marktrisikos des Handelsbuches dient, anhand von VaR-Modellen zu bestimmen. In Österreich ist seit 1. Jänner 1998 die Bestimmung des Eigenmittelerfordernisses anhand interner Modelle<sup>2)</sup> durch die zweite (große) BWG-Novelle erlaubt.<sup>3)</sup> Im Zuge der gesetzlichen Berechnung des Eigenkapitalerfordernisses sind die zu verwendenden Modellparameter genau spezifiziert. Es ist von einer 10tägigen Haltedauer und von einem einseitigen Konfidenzintervall von

99% auszugehen. Bezüglich der Wahl des zugrundeliegenden Modellansatzes ist das Gesetz bewußt sehr liberal formuliert, da nicht ein bestimmter Ansatz vorgeschrieben wird. Es gibt kein „bestes VaR-Modell“, sondern die Modellauswahl ist im Zusammenhang mit der Portfoliozusammensetzung und den jeweiligen Präferenzen (welche Vor- bzw. Nachteile das jeweilige Institut in Kauf nehmen möchte) des Finanzinstituts zu sehen.

Aus Sicht der Regulatoren wäre es wünschenswert, wenn anhand der täglich ermittelten VaR-Zahlen aufgrund der standardisierten Modellparameter Vergleiche zwischen verschiedenen Banken und zwischen verschiedenen Ländern vorgenommen werden könnten. Hendricks und Hirtle (1997) behaupten unter anderem:

„...the information generated by the models will allow supervisors and financial market participants to compare risk exposure over time and across institutions.“

„...a capital charge based on internal models may provide supervisors and the financial markets with a consistent framework for making comparisons across institutions.“

Diese Aussagen sind jedoch nicht allgemein zutreffend, da unterschiedliche Modellansätze zu verschiedenen Ergebnissen führen können.

In dieser Arbeit wird untersucht, ob Vergleiche von VaR-Zahlen, die anhand verschiedener Modellansätze ermittelt wurden, sinnvoll sind. Es werden der Varianz/Kovarianz-Ansatz, die historische Simulation und eine neue Methode, die von Hull und White (1998) vorgeschlagen wurde, zur Ermittlung der VaR-Zahlen verwendet. Die neue Methode beruht auf der Schätzung von sogenannten leptokurtischen Verteilungen. Leptokurtische Verteilungen haben mehr Wahrscheinlichkeitsmasse an den Enden als z. B. die Normalverteilung.<sup>4)</sup> Besonders im Fall von Wechselkursrenditen, aber auch für die Renditen vieler anderer Finanzinstrumente findet man Leptokurtosis. Die Vergleiche werden für 20 Wechselkursportfolios für eine Periode von 1.000 Handelstagen durchgeführt. In einem nächsten Schritt wird die Evaluierung der einzelnen Methoden basierend auf Rückvergleichen mit den tatsächlichen Handelsergebnissen vorgenommen.

Abschnitt 2 beinhaltet eine Darstellung der verwendeten Ansätze zur Ermittlung des täglichen VaR. In Abschnitt 3 werden die verwendeten Daten beschrieben. In Abschnitt 4 wird die genaue Schätzung der einzelnen Modellvarianten erläutert. Abschnitt 5 beinhaltet die Ergebnisse der Vergleiche zwischen den verschiedenen Ansätzen und eine Evaluierung der Methoden. Schlußfolgerungen werden in Abschnitt 6 gezogen.

## 2 VaR-Verfahren

Zur Schätzung der VaR-Zahlen werden der Varianz/Kovarianz-Ansatz, die historische Simulation und die Monte-Carlo-Methode, die auf der Schätzung von Mischverteilungen (bestehend aus zwei Normalverteilungen) beruht, herangezogen.

Dem Varianz/Kovarianz-Ansatz liegt die Annahme zugrunde, daß die Marktrisikofaktoren, die den Wert des jeweiligen Portfolios bestimmen, multivariat normalverteilt sind. Diese Annahme vereinfacht die VaR-

Berechnung ungemein, da für jedes „lineare“ Portfolio gilt, daß die Portfolioveränderungen ebenfalls wieder normalverteilt sind. Der VaR wird ermittelt nach:

$$\text{VaR} = \alpha \sqrt{w \Sigma w^t W}, \quad (2)$$

wobei  $w$  der Zeilenvektor der Portfoliogewichte,  $\Sigma$  die Varianz/Kovarianz-Matrix,  $\alpha$  ein Skalierungsfaktor (1.65 für das 95%-Konfidenzintervall und 2.33 für das 99%-Konfidenzintervall) und  $W$  der aktuelle Portfoliowert sind. Für die Ermittlung des VaR ist die Schätzung der Varianz/Kovarianz-Matrix der Marktrisikofaktoren notwendig. Die Bestimmung dieser Matrix kann durch verschiedene Schätzverfahren erfolgen. Eine Möglichkeit besteht darin, die Varianzen und Kovarianzen anhand der historischen Zeitreihen der täglichen Returns der Marktrisikofaktoren, mittels gleichgewichteter gleitender Durchschnitte zu bestimmen. Dazu verwendet man:

$$\sigma_{i,jT} = \sum_{t=T-n}^{T-1} \frac{r_{it}r_{jt}}{n}. \quad (3)$$

Bei täglichen Returns wird häufig der Erwartungswert Null gesetzt.<sup>5)</sup> Mit  $\sigma_{i,jT}$  werden die Kovarianzen (bzw. die Varianzen bei  $i=j$ ) zum Zeitpunkt  $T$ , mit  $r_{it}$  die tägliche Rendite des  $i$ -ten Marktfaktors am Tag  $t$  und mit  $n$  die Anzahl der Beobachtungen (Fensterlänge) bezeichnet. Ein anderer oft verwendeter Schätzer beruht auf der exponentiellen Gewichtung der historischen Beobachtungen (EWMA)<sup>6)</sup>. Diesem Schätzverfahren liegt die Idee zugrunde, daß historische Werte, die noch nicht weit in der Vergangenheit zurückliegen, ein größeres Gewicht erhalten sollten als Beobachtungen, die vor sehr langer Zeit aufgetreten sind. Der EWMA-Schätzer in rekursiver Darstellung ist gegeben durch

$$\sigma_{i,j/t} = \lambda \sigma_{i,j,t-1} + (1-\lambda)r_{it}-1r_{jt}-1. \quad (4)$$

Der Parameter  $\lambda$  bestimmt die exponentiell abnehmende Gewichtung der Beobachtungen. Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Verfahren besteht darin, daß die EWMA-Schätzung die Zeitabhängigkeit von Varianzen berücksichtigt, das gleichgewichtete Verfahren nicht.<sup>7)</sup>

Eine weitere Methode zur Ermittlung des VaR ist die historische Simulation. Für jeden Tag innerhalb einer historischen Periode werden die beobachteten Renditen der Marktrisikofaktoren als ein mögliches zukünftiges Szenario aufgefaßt. Das jeweilige Portfolio wird unter allen sich aus der Historie ergebenden Szenarien bewertet. Aus der resultierenden empirischen Gewinn/Verlust-Verteilung kann der VaR bei einem vorgegebenen Konfidenzniveau als das entsprechende Quantil ermittelt werden.

Beide Ansätze weisen sowohl Vorteile als auch Nachteile auf. Für den Varianz/Kovarianz-Ansatz spricht die einfache Berechnung des VaR anhand der Formel (2). Diese Formel beruht jedoch auf den Annahmen, daß die Renditen der Marktrisikofaktoren normalverteilt sind und daß das Portfolio eine lineare Funktion der Risikofaktoren ist. Wie realistisch sind diese

Annahmen? Die Normalverteilungsannahme erscheint für die Rendite vieler Finanzinstrumente nicht gerechtfertigt, da man besonders bei Währungen und Aktien Leptokurtosis findet. In diesem Fall wird durch die Annahme der Normalverteilung der VaR unterschätzt. Die zweite Annahme kann für ein Portfolio, das sich auch aus Optionen zusammensetzt, nicht mehr aufrechterhalten werden. Es gibt eine Reihe von Varianten des Varianz/Kovarianz-Ansatzes, die auch auf Portfolios mit Optionen anwendbar sind, z. B. Zangari (1996) oder Jamshidian und Zhu (1996). Dabei wird die Ermittlung des VaR wesentlich komplizierter. Die VaR-Ergebnisse werden bei diesem Ansatz sehr stark von der Schätzmethode der Varianz/Kovarianz-Matrizen beeinflusst.

Ein Vorteil der historischen Simulation ist, daß keine Annahmen bezüglich der Verteilung der Returns der Marktrisikofaktoren getroffen werden, außer daß die Verteilung über die Zeit konstant bleibt. Weiters sind keine Volatilitäts- und Kovarianz-Schätzungen notwendig. Die ermittelten VaR-Resultate hängen allerdings wesentlich von der Länge der historischen Periode ab.

Der große Vorteil der neuen Methode ist darin zu sehen, daß die Normalverteilungsannahme aufgegeben wird und durch die Schätzung einer Mischverteilung Leptokurtosis besser modelliert werden kann. Außerdem verzichtet dieses Verfahren nicht auf die angenehmen Rechengenschaften der Normalverteilung, da die ursprünglichen Daten auf geeignete Weise so transformiert werden, daß die transformierten Daten normalverteilt sind und daraus der VaR einfach bestimmt werden kann. Es sei  $e_{it}$  die Rendite des  $i$ -ten Risikofaktors für den Tag  $t$  und  $G_{it}$  die angenommene Verteilung für  $e_{it}$ . Durch eine geeignete Abbildung

$$f_{it} = N^{-1}[G_{it}(e_{it})] \quad (5)$$

soll die Variable  $e_{it}$  in eine normalverteilte Variable  $f_{it}$  transformiert werden. Mit  $N$  wird die Normalverteilungsfunktion und mit  $N^{-1}$  die entsprechende inverse Funktion bezeichnet. Die Transformation erfolgt auf Quantilsbasis, das heißt, ein bestimmtes Quantil der  $G_{it}$ -Verteilung wird auf das entsprechende Quantil der Normalverteilung abgebildet. Zuerst muß die funktionale Form der  $G_{it}$ -Verteilung gewählt werden, um im nächsten Schritt aus den historischen Daten die Parameter der  $G_{it}$ -Verteilung zu schätzen. Nach Ermittlung der funktionalen Form ist es möglich, anhand der Beziehung

$$e_{it} = G_{it}^{-1}[N(f_{it})] \quad (6)$$

die Variablen  $f_{it}$  in die ursprünglichen Daten abzubilden. Diese Methode ist in der Lage, Leptokurtosis, die ein Charakteristikum der Verteilungen vieler Finanzrenditen ist, zu berücksichtigen. Außerdem kann das Verfahren ohne großen zusätzlichen Aufwand für Portfolios, die nichtlineare Finanzinstrumente enthalten, verwendet werden.

Zur Berechnung des VaR werden in dieser Arbeit zuerst mittels Monte-Carlo-Simulation eine große Anzahl von standardnormalverteilten Variablen  $f_{it}$  erzeugt. Korrelationseffekte zwischen den Marktrisikofaktoren sind anhand der Cholesky-Zerlegung berücksichtigt. Mittels der in Formel (6)

beschriebenen Transformation wird die Rückabbildung vorgenommen. Nach jedem Simulationsschritt und der anschließenden Transformation kann das jeweilige Portfolio bewertet werden. Aus der resultierenden Gewinn/Verlust-Verteilung wird der entsprechende VaR ermittelt.

### 3 Daten

Die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung des VaR werden auf ein gleichgewichtetes und 19 zufällig ausgewählte Wechselkursportfolios angewandt. Der Ausgangswert aller Portfolios beträgt 100 Mio USD. Veränderungen der Portfoliowerte ergeben sich ausschließlich aus den Veränderungen der Wechselkurse, aus denen sich das Portfolio zusammensetzt. Die Auswahl sehr einfacher, nämlich linearer Portfolios erfolgte bewußt, da die für nicht-lineare Finanzprodukte benötigten Bewertungs- und Mapping-Verfahren nur zu zusätzlichen Schwankungen (Noise) der Vergleiche geführt hätten. Alle Portfolios setzen sich aus dem australischen Dollar (AUD), dem österreichischen Schilling (ATS), dem belgischen Franc (BEF), dem Schweizer Franken (CHF), der Deutschen Mark (DEM), der dänischen Krone (DKK), der spanischen Peseta (ESP), dem französischen Franc (FRF), dem Pfund Sterling (GBP), der italienischen Lira (ITL), dem japanischen Yen (JPY), dem niederländischen Gulden (NGL) und der schwedischen Krone (SEK) zusammen. Verwendet werden tägliche Wechselkursdaten gegenüber dem Dollar über die Zeitperiode vom 16. Juni 1986 bis zum 15. Juni 1998. Für jede individuelle Zeitreihe liegen 3.131 Beobachtungen vor. Wie aus Tabelle 1 ersichtlich, sind die Verteilungen der Renditen aller Wechselkurse leptokurtisch.<sup>8)</sup>

Tabelle 1

Excess Kurtosis von Wechselkursen gegenüber dem USD			
Währung	Excess Kurtosis	Währung	Excess Kurtosis
AUD	4'84	GBP	3'44
BEF	2'91	ITL	8'49
CHF	2'04	JPY	4'81
DEM	2'30	NLG	3'50
DKK	4'18	SEK	6'07
ESP	5'69	ATS	2'87
FRF	3'04		

Quelle: OeNB.

Die dicken Enden von leptokurtischen Verteilungen implizieren, daß extreme Beobachtungen (Marktschwankungen) häufiger auftreten als bei einer Normalverteilung.<sup>9)</sup> Unter der Annahme der Normalverteilung ergibt sich der VaR bei einem Konfidenzniveau von 99% aus  $2'33$ , multipliziert mit der entsprechenden Standardabweichung. Falls die zugrundeliegende Verteilung leptokurtisch ist, wird der VaR unterschätzt, da eine größere Wahrscheinlichkeitsmasse auf den Enden liegt. In Tabelle 2 werden die Probleme, die sich durch die Normalverteilungsannahme bei leptokurtischen Verteilungen für das 1%- und 5%-Quantil ergeben, veranschaulicht.

Das 1%-Quantil jedes Wechselkurses übersteigt das durch die Normalverteilung mit  $2'33$  vorgegebene 1%-Quantil. Das durchschnittliche 1%-Quantil liegt  $2'62$  Standardabweichungen unter dem Erwartungswert. Das 5%-Quantil der meisten Wechselkurse liegt unter dem mit  $1'65$  durch

die Normalverteilung implizierten Wert. Bei einem Konfidenzniveau von 95% führt die Normalverteilungsannahme tendenziell zu „konservativen“ VaR-Schätzungen.

Tabelle 2

Empirische 5%-Quantile bzw. 1%-Quantile		
gemessen als Vielfaches der Standardabweichung		
Währung	5%-Quantil	1%-Quantil
AUD	1'49	2'46
BEF	1'64	2'61
CHF	1'66	2'80
DEM	1'68	2'66
DKK	1'63	2'56
ESP	1'56	2'49
FRF	1'62	2'75
GBP	1'60	2'60
ITL	1'57	2'54
JPY	1'64	2'80
NLG	1'62	2'64
SEK	1'53	2'53
ATS	1'66	2'60
Durchschnitt	1'61	2'62

Quelle: OeNB.

#### 4 Schätzung der VaR-Ansätze

In diesem Abschnitt wird die genaue Schätzung der sechs verschiedenen Varianten zur VaR-Berechnung beschrieben. Für jede Variante werden die VaR-Zahlen für die 1.000 letzten Handelstage des Beobachtungszeitraums und für jedes der 20 Wechselkursportfolios ermittelt. Ausgegangen wird von einer eintägigen Haltedauer und einem Konfidenzintervall von 99 und 95%. Alle Schätzungen verwenden die Annahme, daß der Erwartungswert der täglichen Wechselkursrenditen null ist.

In dieser Arbeit werden zwei Varianten des Varianz/Kovarianz-Ansatzes geschätzt. Für die erste Variante werden die Varianzen und Kovarianzen als gleichgewichteter gleitender Durchschnitt mit einer Fensterlänge von 250 Tagen bestimmt. Dieses Ermittlungsverfahren modelliert keine Zeitabhängigkeiten der Varianzen und Kovarianzen. Aufgrund der empirischen Evidenz erscheint die Schätzung der Varianz/Kovarianz-Matrix anhand des gleichgewichteten gleitenden Durchschnitts nicht besonders geeignet.

Die zweite Variante des Varianz/Kovarianz-Ansatzes beruht auf einer Schätzung der Volatilitäten und Kovarianzen anhand des exponentiell gewichteten Durchschnitts. Im Gegensatz zur ersten Variante können dadurch Zeitabhängigkeiten, wie z. B. Volatilitäts-Clustering, modelliert werden. Die abnehmende exponentielle Gewichtung, durch die die Persistenz der geschätzten Varianzen und Kovarianzen bestimmt wird, hängt von der Wahl des Parameters  $\lambda$  ab. Wie bei J. P. Morgan (1996) wurde  $\lambda$  mit 0'94 festgelegt.

Die dritte und die vierte Variante zur VaR-Schätzung verwenden die historische Simulation mit den historischen Perioden von 250 und 1.250 Handelstagen. Es wird keine Gewichtung der einzelnen historischen Szenarien vorgenommen. Problematisch ist bei diesem Ansatz die Wahl der Länge der berücksichtigten vergangenen Zeitperiode. Liegen momentan sehr große Marktschwankungen vor, wobei die Volatilität in der Vergangen-

heit aber eher gering ist, kommt es zu einer Unterschätzung des VaR. Dieser Aspekt wird noch ausführlicher im Abschnitt 5 beschrieben.

Für die Durchführung der Monte-Carlo-Simulation, basierend auf dem Vorschlag von Hull und White (1998), muß eine funktionale Form für die Verteilungsfunktion der Risikofaktoren angenommen werden. In dieser Studie werden die Verteilungen der Wechselkursrenditen durch die Mischung von zwei Normalverteilungen geschätzt:

$$G_{it}(e_t) = p_i N\left(\frac{e_{it}}{u_i \sigma_{it}}\right) + (1-p_i) N\left(\frac{e_{it}}{v_i \sigma_{it}}\right) \quad (7)$$

wobei mit  $G_{it}(e_{it})$  der Wert der Verteilungsfunktion für die Beobachtung  $e_{it}$ , mit  $N$  die Normalverteilungsfunktion, mit  $p_i$  bzw.  $(1-p_i)$  die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Normalverteilungen und mit  $u_i$  und  $v_i$  die Skalierungsparameter der Standardabweichung  $\sigma_{it}$  bezeichnet werden.<sup>10)</sup> Da die Varianz der Mischverteilung gleich der Varianz der empirischen Verteilung sein muß, ist es notwendig, daß die Parameter der geschätzten Mischverteilung die folgende Nebenbedingung erfüllen:<sup>11)</sup>

$$p_i u_i^2 + (1-p_i) v_i^2 = 1. \quad (8)$$

Für jeden Wechselkurs müssen die entsprechenden Parameter  $p_i$ ,  $u_i$ ,  $v_i$  und  $\sigma_{it}$  geschätzt werden. Aus schätztechnischen Gründen wird nicht direkt die Maximum-Likelihood-Funktion optimiert, sondern es werden die Beobachtungen in die folgenden 4 Kategorien eingeteilt: kleiner oder gleich eine Standardabweichung ( $|e_{it}| \leq \sigma_{it}$ ); ein bis zwei Standardabweichungen ( $\sigma_{it} < |e_{it}| \leq 2\sigma_{it}$ ); zwei bis drei Standardabweichungen ( $2\sigma_{it} < |e_{it}| \leq 3\sigma_{it}$ ) und größer als drei Standardabweichungen ( $|e_{it}| > 3\sigma_{it}$ ). Anschließend erfolgt die Optimierung der Maximum-Likelihood-Funktion

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} \log(\beta_{ij}), \quad (9)$$

die man erhält, wenn man den aufgrund bestimmter Parameterwerte  $p_i$ ,  $u_i$  und  $v_i$  vorausgesagten Anteil der Daten  $\beta_{ij}$  mit dem Anteil der tatsächlichen Beobachtungen  $\alpha_{ij}$  für jede Kategorie vergleicht. Gesucht ist jene Parameterkonstellation für  $p_i$ ,  $u_i$  und  $v_i$ , die die beste Anpassung an die empirische Verteilung der Risikofaktoren erzielt.

Es werden zwei verschiedene Versionen geschätzt. Eine Variante verwendet gleichgewichtete gleitende Durchschnitte und die andere Variante basiert auf exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitten mit einem Gewichtungsfaktor von 0,94. Die Ergebnisse der Parameterschätzungen für beide Versionen sind in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Für beide Varianten wurden an allen 1.000 Handelstagen 10.000 Monte-Carlo-Schritte (Erzeugung von 10.000 standardnormalverteilten Vektoren der Dimension 13) für alle 20 Portfolios durchgeführt. Für alle Simulationen werden die Korrelationen nach den Formeln (3) und (4) an jedem Handelstag  $t$  ermittelt. Die Simulation der gemeinsamen Verteilung der Risikofaktoren erfolgt anhand der Cholesky-Zerlegung der geschätzten

Tabelle 3

Geschätzte Parameter für Mischverteilungen						
bestehend aus zwei Normalverteilungen (mit gleich bzw. exponentiell gewichteten Varianzen)						
Währung	Gleichgewichtung			EWMA		
	u	p	v	u	p	v
AUD	0'68	0'71	1'52	0'64	0'36	1'15
BEF	0'71	0'68	1'43	0'45	0'21	1'10
CHF	0'74	0'63	1'33	0'45	0'15	1'07
DEM	0'73	0'74	1'53	0'44	0'19	1'09
DKK	0'77	0'81	1'65	0'45	0'18	1'08
ESP	0'70	0'72	1'52	0'49	0'25	1'12
FRF	0'74	0'77	1'59	0'47	0'14	1'06
GBP	0'64	0'68	1'50	0'45	0'24	1'12
ITL	0'69	0'71	1'51	0'48	0'22	1'10
JPY	0'71	0'73	1'53	0'67	0'49	1'24
NLG	0'72	0'73	1'52	0'45	0'18	1'08
SEK	0'78	0'81	1'63	0'49	0'20	1'09
ATS	0'69	0'71	1'51	0'47	0'23	1'11

Quelle: OeNB.

Varianz/Kovarianz-Matrix für jeden Tag  $t$ . Da für die Transformation der simulierten Daten in die tatsächlichen Beobachtungen, die durch die Mischverteilungen impliziert werden, keine geschlossene Lösung existiert, wird das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer iterativen Lösung angewandt. An jedem der 1.000 Handelstage werden die dabei erhaltenen transformierten Daten (10.000 Szenarien) benützt, um die einzelnen Portfolios zu bewerten. Der VaR wird aus der resultierenden Gewinn/Verlust-Verteilung für das jeweilige Portfolio als das entsprechende Quantil (1%- bzw. 5%-Quantil) bestimmt.

## 5 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der täglichen VaR-Berechnung für das 99%- und das 95%-Konfidenzintervall präsentiert. Weiters werden auch die Rückvergleiche aller sechs Varianten zur VaR-Ermittlung mit den tatsächlichen Handelsergebnissen beschrieben. Anhand dieser Rückvergleiche kann eine Evaluierung der verwendeten Methoden vorgenommen werden.

In Grafik 1 sind die VaR-Ergebnisse aller Verfahren für das gleichgewichtete Wechselkursportfolio bei einem Konfidenzniveau von 99% über einen Zeitraum von 1.000 Handelstagen dargestellt. Es ist bereits aus der grafischen Darstellung deutlich ersichtlich, daß – obwohl von einem gleichbleibenden Portfolio ausgegangen wird – die Ergebnisse stark divergieren. Im Durchschnitt erzielt man anhand der historischen Simulation mit einer historischen Periode von 1.250 Tagen die höchsten VaR-Zahlen. Die Liniendiagramme, die durch die historische Simulation erzeugt werden, unterscheiden sich markant von den anderen Methoden. Beim Verfahren der historischen Simulation bleibt der VaR meist einige Tage auf dem gleichen Niveau, verändert sich dann aber sprunghaft. Die Sprunghöhe ist bei einer historischen Periode von 250 Handelstagen viel ausgeprägter. Die Erklärung ist darin zu sehen, daß diese Methode von den seltenen Ereignissen beeinflusst wird. Jede neue VaR-Berechnung bedingt, daß eine neue Beobachtung hinzugefügt wird und eine alte Beobachtung wegfällt. Bei

dieser Beobachtung handelt es sich meist nicht um eine Beobachtung, die am linken Ende der Verteilung liegt und somit den VaR unverändert läßt.

Die Ergebnisse des Varianz/Kovarianz-Ansatzes werden hauptsächlich von der Methode zur täglichen Schätzung der Varianz/Kovarianz-Matrizen beeinflusst. Die Schätzung durch gleichgewichtete gleitende Durchschnitte erzeugt einen glatteren Verlauf der VaR-Zahlen als durch die EWMA-Schätzung. Deutlich erkennbar ist anhand der Grafik 1, daß durch den EWMA-Schätzer Volatilitäts-Clustering, das für die meisten Finanzzeitreihen typisch ist, modelliert wird. Das exponentiell gewichtete Verfahren berücksichtigt die „jüngere Vergangenheit“ stärker als Beobachtungen, die weiter zurückliegen. Der VaR reagiert bei der Ermittlung basierend auf dem EWMA schneller auf Veränderungen der Marktvolatilität. Als Beispiel zur Verdeutlichung dieses Punktes ist die VaR-Entwicklung zwischen dem 300. und 500. Handelstag zu sehen. Bei Verwendung des EWMA-Schätzers ist erkennbar, daß die Marktvolatilität stark sinkt, während beim gleichgewichteten Verfahren der VaR bis zum 400. Tag ungefähr konstant auf einem hohen Niveau bleibt und sich erst danach allmählich dem niedrigen Niveau nähert.

Im nächsten Schritt werden die Unterschiede zwischen den verschiedenen Modellen und dem Varianz/Kovarianz-Ansatz – basierend auf exponentiell gewichteten Durchschnitten – für ein Konfidenzniveau von 99% ermittelt. Es wird der Varianz/Kovarianz-Ansatz basierend auf EWMA-Schätzungen als Benchmark herangezogen, da dieses Verfahren sehr häufig verwendet wird und über Internet die Varianz/Kovarianz-Matrizen gratis erhältlich sind.<sup>12)</sup> In Tabelle 4 sind die Ergebnisse der Vergleiche dargestellt. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Verfahren können sehr groß werden. Der maximale Unterschied zwischen der historischen Simulation mit einer vergangenen Periode von 250 Handelstagen und der Benchmark liegt bei 276%.

Würde man zwei Banken vergleichen, wobei Bank A den Varianz/Kovarianz-Ansatz mit exponentiell gewichteten Korrelationsmatrizen und Bank B die historische Simulation mit einer historischen Periode von 250 Tagen verwendet, könnte man daraus schließen, daß die Positionen von Bank B dreimal so riskant sind wie die von Bank A, obwohl beide Banken die gleichen Portfolios halten. Für alle anderen Methoden, mit Ausnahme des Verfahrens basierend auf Mischverteilungen mit exponentiell gewichteten Varianzen und Kovarianzen, können die gleichen Schlüsse, wenn auch in abgeschwächter Form, gezogen werden.<sup>13)</sup> Anhand dieser Resultate ist ableitbar, daß Vergleiche zwischen verschiedenen Finanzinstitutionen, die verschiedene VaR-Modelle verwenden, zu groben Mißinterpretationen führen können.

Diese Ergebnisse sollen nicht das VaR-Konzept generell in Frage stellen, weil die durchschnittlichen Abweichungen zwischen den verschiedenen Verfahren im Bereich von 25 bis 59% liegen. Außerdem liefern Vergleiche zwischen Finanzinstituten, Organisationseinheiten, Handelstischen usw. wichtige Informationen für die Risikosteuerung und Risikokontrolle, sofern die gleiche Methode zur Berechnung des VaR herangezogen wird.

Interessant sind Vergleiche zwischen dem Varianz/Kovarianz-Ansatz und dem auf Mischverteilungen basierenden Verfahren. Anhand der Grafik 2 ist

Tabelle 4

Differenzen zwischen verschiedenen VaR-Methoden			
bei einem 99%-Konfidenzintervall (Benchmark: Varianz/ Kovarianz-Ansatz mit exponentiell gewichteten Varianzen)			
Methode	Minimum <sup>1)</sup>	Maximum <sup>2)</sup>	Mittelwert <sup>3)</sup>
VCung	0'0	133'7	25'7
HS250	0'0	243'1	59'1
HS1250	0'0	276'5	53'0
MVung	0'0	167'6	31'0
MVewma	0'0	11'2	4'1

Quelle: OeNB.

VCung: Varianz/Kovarianz-Ansatz mit gleichgewichteten gleitenden Durchschnitten.

HS250: Historische Simulation mit einer historischen Periode von 250 Handelstagen.

HS1250: Historische Simulation mit einer historischen Periode von 1.250 Handelstagen.

MVung: Methode basierend auf Mischverteilungen mit gleichgewichteten gleitenden Durchschnitten.

MVewma: Methode basierend auf Mischverteilung mit EWMA-Durchschnitten.

<sup>1)</sup> Minimum bezeichnet den kleinsten Unterschied, der bei allen 20 Portfolios aufgetreten ist.

<sup>2)</sup> Maximum bezeichnet den größten Unterschied, der bei allen 20 Portfolios aufgetreten ist.

<sup>3)</sup> Mittelwert bezeichnet den durchschnittlichen Unterschied, der bei allen 20 Portfolios aufgetreten ist.

ersichtlich, daß bei einem Konfidenzintervall von 99% die Methode, die auf den Mischverteilungen mit Varianzen basierend auf einem gleichgewichteten Schätzer beruhen, immer über dem entsprechenden Varianz/Kovarianz-Ansatz liegen. Durch die Verwendung der Mischverteilungen wird die Leptokurtosis der zugrundeliegenden Marktrisikofaktoren berücksichtigt. Falls zur Schätzung der Varianzen ein exponentiell gewichtetes Verfahren herangezogen wird, sind die Unterschiede wesentlich kleiner. Die VaR-Zahlen bilden aber eine ungefähre obere Grenze für die VaR-Zahlen, die durch den Varianz/Kovarianz-Ansatz ermittelt wurden. Durch die Verwendung des EWMA-Schätzers für Varianzen und Kovarianzen wird zwar teilweise die Leptokurtosis von Wechselkursen berücksichtigt, aber nicht in ausreichendem Ausmaß.

Grafik 4 veranschaulicht die Unterschiede zwischen den beiden Methoden bei einem Konfidenzniveau von 95%. Bei gleichgewichteten Varianzen und Kovarianzen liegen die VaR-Zahlen, die mit Hilfe der Mischverteilungen erzeugt wurden, meistens geringfügig unter den durch den Varianz/Kovarianz-Ansatz erzeugten Werten. Die Ergebnisse drehen sich bei EWMA-Schätzungen um.

Um die einzelnen Verfahren bezüglich ihrer Genauigkeit um das entsprechende Konfidenzintervall evaluieren zu können, werden Rückvergleiche mit den tatsächlichen Handelsergebnissen vorgenommen. Für jeden Tag  $t$  und jedes Portfolio werden die realisierten Verluste oder Gewinne ermittelt. Übersteigt der tatsächliche Verlust den ermittelten VaR, wird dies als Überschreitung gezählt. Rückvergleiche werden an jedem Tag und für jedes Portfolio gezogen. In Tabelle 5 sind die für alle 20 Portfolios durchschnittlichen prozentuellen Anteile an Überschreitungen (extreme Ereignisse) für alle Verfahren dargestellt. Zusätzlich wird auch der minimale und der maximale Anteil an extremen Ereignissen angeführt.

Ein perfektes Verfahren würde einen Anteil von 1 und 5% an Überschreitungen bei einem Konfidenzintervall von 99 und 95% liefern. Beim 99%-Konfidenzintervall liefern der Varianz/Kovarianz-Ansatz basierend auf gleichgewichteten gleitenden Durchschnitten und die historische Simulation mit einer vergangenen Periode von 250 Handelstagen die schlechtesten

Tabelle 5

**Rückvergleich zwischen tatsächlich aufgetretenen  
Handelsergebnissen und VaR-Zahlen**

Methode	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung
<b>99%-Konfidenzintervall</b>				
VCunw	1'3	2'1	1'790	0'20494
VCewma	0'9	1'6	1'305	0'17614
HS250	1'3	2'1	1'790	0'20494
HS1250	0'9	1'6	1'305	0'17614
MVunw	0'8	1'6	1'170	0'23864
MVewma	0'7	1'7	1'010	0'22455
<b>95%-Konfidenzintervall</b>				
VCunw	4'3	5'3	4'780	0'28023
VCewma	3'8	4'8	4'250	0'23508
HS250	4'3	5'3	4'250	0'28023
HS1250	3'8	4'8	4'250	0'23508
MVunw	4'6	5'6	5'030	0'28488
MVewma	3'7	4'6	4'160	0'25215

Quelle: OeNB.

Vcung: Varianz/Kovarianz-Ansatz mit gleichgewichteten gleitenden Durchschnitten.

Vcewma: Varianz/Kovarianz-Ansatz mit EWMA.

HS250: Historische Simulation mit einer historischen Periode von 250 Handelstagen.

HS1250: Historische Simulation mit einer historischen Periode von 1.250 Handelstagen.

Mvung: Methode basierend auf Mischverteilungen mit gleichgewichteten gleitenden Durchschnitten.

Mvewma: Methode basierend auf Mischverteilungen mit EWMA.

Ergebnisse, da sie die größte Anzahl an Überschreitungen aufweisen. Sogar der minimale Anteil liegt in beiden Fällen über 1%. Bei beiden Methoden ist die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit von Verlusten größer als der VaR, nämlich 1'8% und nicht 1%. Rückvergleiche aufgrund der historischen Simulation mit einer historischen Periode von 1.250 Handelstagen und dem Varianz/Kovarianz-Ansatz basierend auf EWMA-Schätzungen liefern bessere Ergebnisse. Die beste Anpassung an das 99%-Konfidenzintervall wird durch das neue Verfahren, das auf Mischverteilungen beruht, erzielt. Beide Varianten dieses Verfahrens liegen nahe bei 1%. Vor allem die Variante mit exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitten trifft das Konfidenzintervall von 99% ziemlich genau. Diese Resultate verdeutlichen, daß Modelle, die die Leptokurtosis der Marktrisikofaktoren nicht berücksichtigen, tendentiell den VaR unterschätzen. Fünf der sechs Methoden liefern beim 95%-Konfidenzintervall zu konservative VaR-Schätzungen. Das Verfahren basierend auf Mischverteilungen und gleichgewichteten Varianz-Schätzern trifft das 95%-Konfidenzintervall am genauesten. Die zweite Variante, die auf der Schätzung von Mischverteilungen beruht, liefert den geringsten Anteil an extremen Ereignissen.

## 6 Schlußfolgerungen

In dieser Arbeit werden sechs verschiedene Methoden zur Ermittlung des VaR untersucht. Zwei Verfahren basieren auf dem Varianz/Kovarianz-Ansatz mit gleich und exponentiell gewichteten Schätzverfahren für die Varianz/Kovarianz-Matrizen. Zwei weiteren Verfahren liegt die historische Simulation mit unterschiedlich langen historischen Zeitperioden zugrunde. Beide Modelltypen (Varianz/Kovarianz-Ansatz und historische Simulation) werden von Finanzinstituten sehr häufig zur Berechnung des VaR herangezogen. Typischerweise sind die Verteilungen der meisten Finanzrenditen leptokurtotisch.

kurtisch. Um diese Eigenschaft zu berücksichtigen, wird eine neue Methode, die auf der Schätzung von Mischverteilungen (aus zwei Normalverteilungen) beruht, verwendet. Für diese Methode werden ebenfalls zwei Varianten geschätzt. Eine beruht auf der Schätzung von gleichgewichteten Varianzen und Kovarianzen, die andere verwendet exponentiell gewichtete Varianzen und Kovarianzen.

Ein Vergleich zwischen den verschiedenen Verfahren – angewandt auf identische Wechselkursportfolios – zeigt, daß die Unterschiede sehr groß sein können. Bei diesen Vergleichen wird das Varianz/Kovarianz-Verfahren basierend auf exponentiell gewichteten Schätzungen der Varianz/Kovarianz-Matrizen als Benchmark herangezogen. An manchen Tagen werden Unterschiede von über 200% gefunden. Die durchschnittlichen Unterschiede zwischen den Methoden liegen im Bereich von 25 bis 59%. Diese Resultate verdeutlichen, daß Vergleiche von VaR-Zahlen zwischen Kreditinstituten, die unterschiedliche Modelle verwenden, zu Mißinterpretationen führen können. Freilich bleibt unbestritten, daß das VaR-Konzept ein sehr wichtiges Instrument für das Risikomanagement darstellt. Falls für die Ermittlung des VaR das gleiche Verfahren verwendet wird, liefern Vergleiche zwischen Handelstischen, Risikokategorien usw. wertvolle Informationen für die Risikosteuerung und -kontrolle.

Zusätzlich wird anhand von Rückvergleichen die Anpassung der einzelnen Methoden an das vorgegebene Konfidenzintervall untersucht. Die Resultate sind konsistent mit der Vermutung, daß Verfahren, die die Leptokurtosis von Marktrisikofaktoren nicht berücksichtigen, das 99%-Konfidenzintervall in der Regel unterschätzen. Die gleichen Verfahren neigen im Fall des 95%-Konfidenzintervalls dazu, den VaR zu überschätzen. Für alle zwei Konfidenzniveaus werden mit einer Variante der neuen Methode die besten Anpassungen erzielt, da dieses Verfahren geeignet ist, die Leptokurtosis von Verteilungen zu berücksichtigen.

#### Literaturhinweise

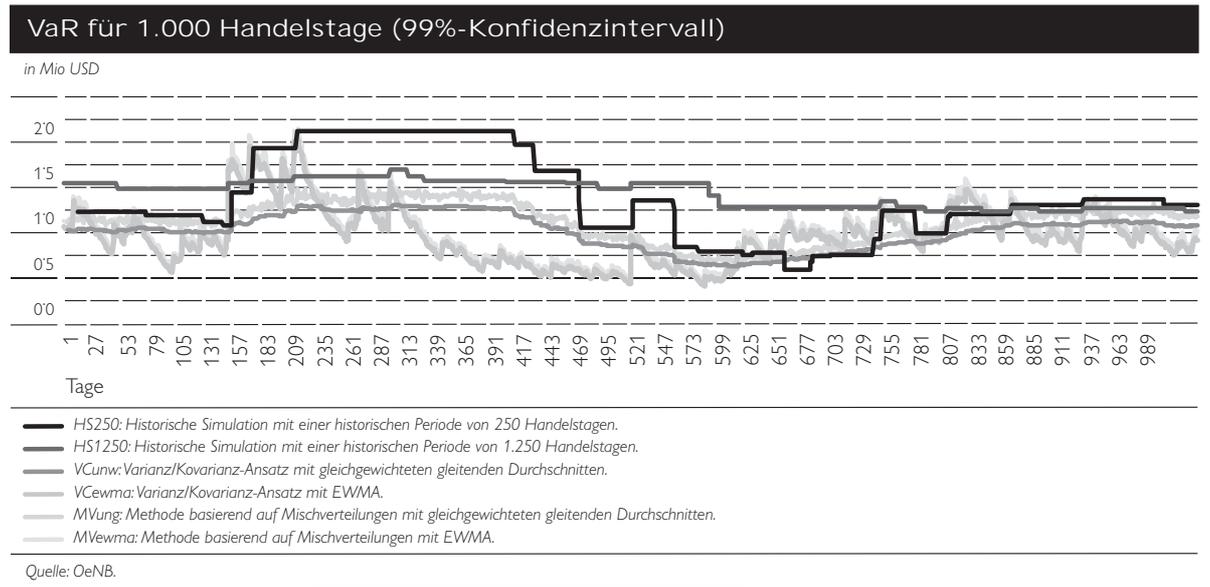
- Alexander, C. (1996 a).** Volatility and Correlation Forecasting. In: Alexander, C. eds. (1996 b), 233-260.
- Alexander, C. (1996 b).** The Handbook of Risk Management and Analysis. John Wiley and Sons. New York, Toronto, Singapore.
- Baseler Ausschuß für Bankenaufsicht (1996).** Änderungen der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung von Marktrisiken.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. und MacKinley, A. C. (1997).** The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press.
- Dowd, K. (1998).** Beyond Value at Risk – The new Science of Risk Management. John Wiley and Sons. New York, Toronto, Singapore.
- Duffie, D. und Pan, J. (1997).** An Overview of Value at Risk. The Journal of Derivatives. Spring, 7–49.
- EG-Kommission (1993).** Richtlinie 93/6/EWG des Rates vom 15. März 1993 über die angemessene Eigenkapitalausstattung von Wertpapierfirmen und Kreditinstituten (Kapitaladäquanz-Richtlinie).
- Figlewski, S. (1994).** Forecasting Volatility Using Historical Data. New York University Working Paper S-94-13.

- Hendricks, D. und Hirtle, B. (1997).** Bank Capital Requirements for Market Risk: The Internal Models Approach. FRBNY Economic Policy Review. December, 1–12.
- Hull, J. und White, A. (1998).** Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed. The Journal of Derivatives. 9–19.
- Jamshidian, F. und Zhu, J. (1997).** Scenario Simulation Model: Theory and Methodology. Finance and Stochastic. Vol 1, 43–67.
- Jorion, P. (1997).** Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk. IRWIN. Chicago, London, Singapore.
- J. P. Morgan/Reuters (1996).** RiskMetrics TM – Technical Document.
- Kroner, K. F. (1996).** Creating and Using Volatility Forecasts. Derivatives Quarterly Winter, 39–53.
- Müller, U. A., Dacorogna, M. M. und Pictet, O. V. (1996).** Heavy Tails in High-Frequency Financial Data. Working Paper. Olsen & Associates. Zürich, Switzerland.
- Zangari, P. (1996).** An Improved Methodology for Measuring VaR, RiskMetrics Monitor. J. P. Morgan/Reuters.

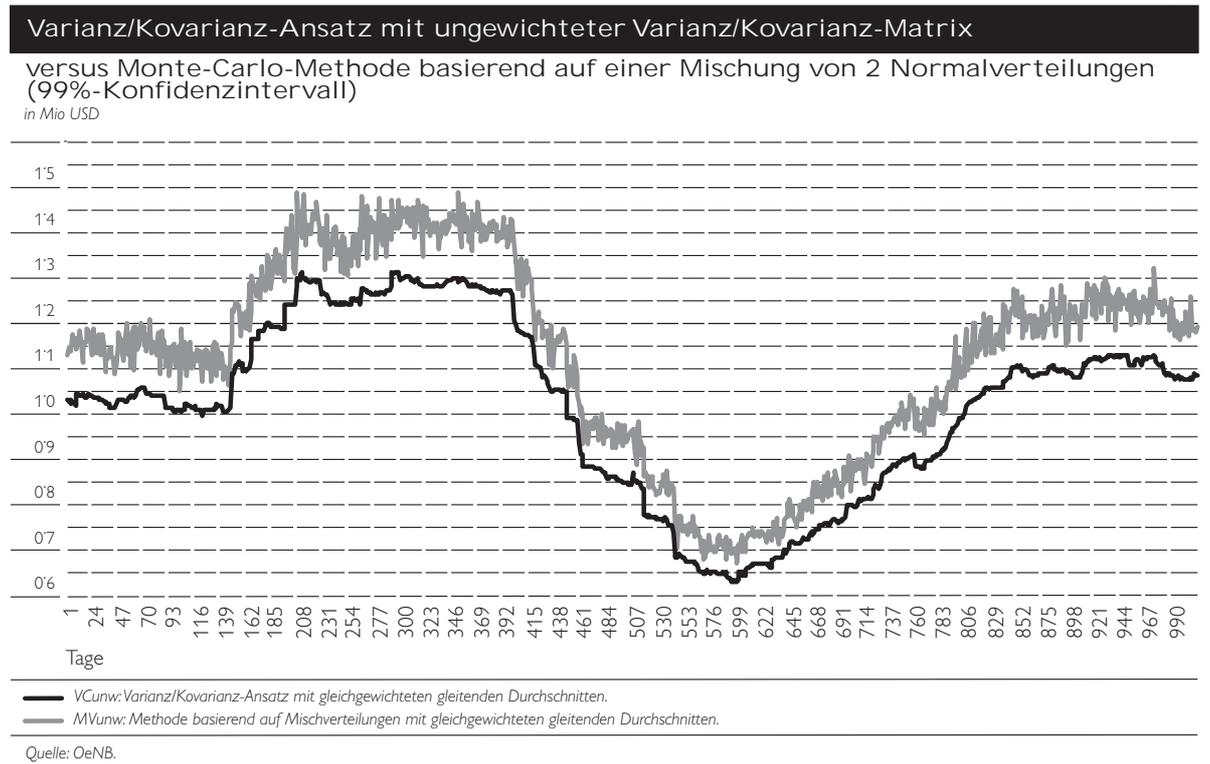
- 1 Wir danken Helmut Elsinger, Gerald Krenn und Diane Moore für hilfreiche Anregungen.
- 2 Der Ausdruck „interne Modelle“ wird als Synonym für VaR-Modelle verwendet.
- 3 Hinsichtlich der Ermittlung des Eigenmittelerfordernisses des Markt- und spezifischen Risikos sind als Grundlage für die zweite (große) BWG-Novelle das „Baseler Marktrisikopapier“ (Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, 1996) und die Richtlinie 93/6/EWG (EG-Kommission, 1993) zu erwähnen.
- 4 Siehe Campbell, Lo und MacKinlay (1997).
- 5 Für nähere Details bezüglich der Annahme, daß der Erwartungswert der täglichen Renditen der Markt-risikofaktoren Null ist, wird auf die Studie von Figlewski (1994) verwiesen.
- 6 Exponentially Weighted Moving Average (EWMA).
- 7 Der EWMA-Ansatz ist zu einem IGARCH(1,1)-Modell ohne Konstante äquivalent.
- 8 Müller, Dacorogna und Pictet (1996) beschäftigen sich mit den Renditenverteilungen der wichtigsten Wechselkurse.
- 9 Leptokurtische Verteilungen können von Sprung-Prozessen, stochastischer Volatilität oder Markov-Switching erzeugt werden. Eine genaue Beschreibung ist in Duffie und Pan (1997) zu finden.
- 10 Durch die Mischung von zwei Normalverteilungen wie z. B. in (7) ist es möglich, bei Verwendung der gleichen Standardabweichung Verteilungen mit dickeren Enden als bei der Normalverteilung zu erzeugen. Eine Diskussion dieses Punktes erfolgt in Duffie und Pan (1997), Hull und White (1998) oder Campell, Lo und MacKinlay (1997).
- 11 Die Varianz der Mischverteilung ist durch  $pu^2\sigma_1^2 + (1-p)v^2\sigma_2^2$  gegeben.
- 12 Diese Varianz/Kovarianz-Matrizen werden von J. P. Morgan/Reuters unter der www-Adresse: <http://www.riskmetrics.reuters.com> zur Verfügung gestellt.
- 13 Da man ähnliche Ergebnisse für das 95%-Konfidenzintervall erhält, werden diese nicht berichtet.

Anhang

Grafik 1



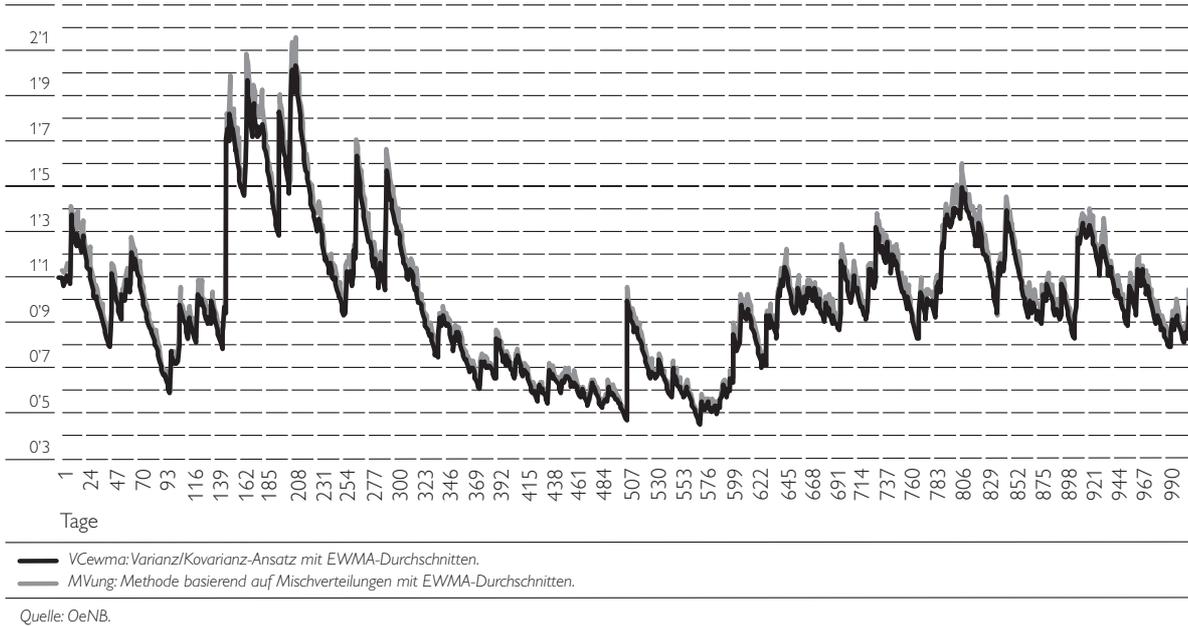
Grafik 2



Grafik 3

**Varianz/Kovarianz-Ansatz mit exponentiell gewichteter Varianz/Kovarianz-Matrix**  
 versus Monte-Carlo-Methode basierend auf einer Mischung von 2 Normalverteilungen  
 (99%-Konfidenzintervall)

in Mio USD

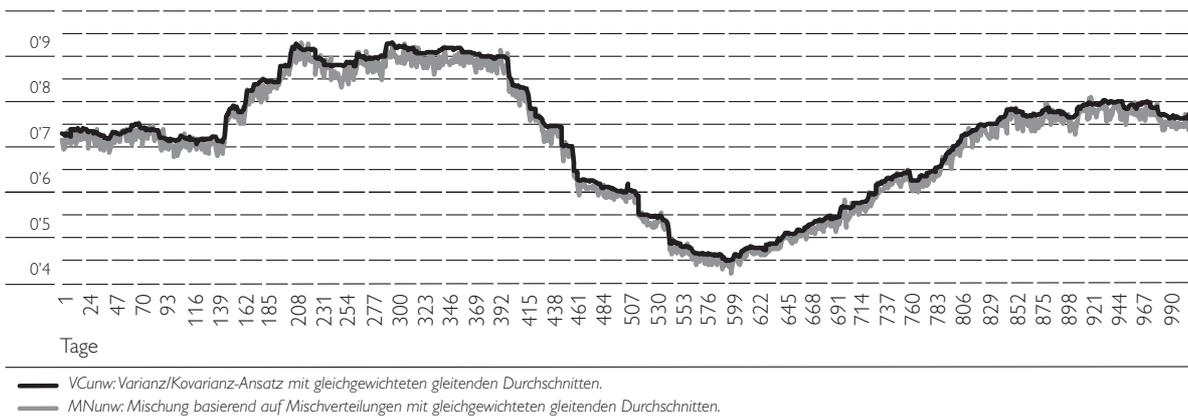


Quelle: OeNB.

Grafik 4

**Varianz/Kovarianz-Ansatz mit ungewichteter Varianz/Kovarianz-Matrix**  
 versus Monte-Carlo-Methode basierend auf einer Mischung von 2 Normalverteilungen  
 (95%-Konfidenzintervall)

in Mio USD



Quelle: OeNB.