



# RISIKO MANAGER

03 . 2015

[ KREDITRISIKO ] [ MARKTRISIKO ] [ LIQUIDITÄTSRISIKO ] [ OPRISK ] [ ERM ] [ REGULIERUNG ]



## Inhalt

- 1, 8 Lévy-Prozesse unendlicher Aktivität
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 11 Überarbeitung des Verbriefungsregelwerks finalisiert
- 14 Buchbesprechung
- 15 Stressed Leverage Ratio: Die Büchse der Pandora?
- 21 Personalien
- 22 Impressum
- 23 Produkte & Unternehmen

WWW.RISIKO-MANAGER.COM

## Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 6)

# Lévy-Prozesse unendlicher Aktivität

In den vergangenen Artikeln dieser Serie sind wir im Zuge der Einführung in Lévy-Prozesse und Optionspreisbewertung in Lévy-Modellen immer wieder auf Sprungprozesse mit unendlicher Aktivität gestoßen. Solche unendlich aktiven Lévy-Prozesse erscheinen aufgrund ihrer Eigenschaft, innerhalb endlicher Zeiträume unendlich oft zu springen, auf den ersten Blick sehr unhandlich. Sie sind auch weniger intuitiv verständlich im Vergleich zu Lévy-Prozessen mit endlicher Aktivität, welche eben nur endlich oft in einem beliebigen endlichen Zeitraum springen. Nichtsdestotrotz haben wir in den bisherigen Teilen bereits gesehen, dass es einige unendlich aktive Lévy-Prozesse gibt, die sowohl aufgrund ihrer statistischen Eigenschaften als auch wegen ihrer mathematischen Handhabbarkeit sehr gut geeignet sind, um Dynamiken von Asset-Wertprozessen zu beschreiben.

**D**ennoch ist ein Finanzmarktmodell oft erst dann sinnvoll einsetzbar, wenn es möglich ist, Preisprozesspfade effizient zu simulieren. Aber wie simuliert man unendlich viele Sprünge? Genau dieser Frage widmen wir uns in dem heutigen Teil unserer Serie.

In Teil 3 (siehe RISIKO MANAGER 20/2014) haben wir uns die Optionspreisbewertung in exponentiellen Lévy-Modellen angeschaut und sind dabei bereits auf die Lévy-Khintchin-Formel gestoßen. Diese Formel besagt unter anderem, dass sich

**Fortsetzung auf Seite 8**

Anzeige

**Jetzt anmelden**

# Fachkonferenz Zahlungsverkehr der Zukunft

25. und 26. Februar 2015

Weitere Informationen erhalten Sie bei  
Stefan Lödorf, Telefon: 0221/5490-133

Sponsoren der Veranstaltung



**Fortsetzung von Seite 1**

jeder Lévy-Prozess, gegeben einer beliebigen positiven Zahl  $\varepsilon$ , in vier Komponenten aufteilen lässt: erstens, der deterministische Drift, zweitens, der Diffusionsteil, getrieben durch eine Brown'sche Bewegung, drittens, die großen Sprünge, und viertens, die kompensierten kleinen Sprünge, also die um einen Drift bereinigten kleinen Sprünge. Die Zahl  $\varepsilon$  dient hierbei lediglich als Entscheidungskriterium, ob ein Sprung als groß oder klein erachtet wird. Ein Sprung wird als „groß“ bezeichnet, wenn die absolute Sprunghöhe größer ist als  $\varepsilon$ , ansonsten gilt der Sprung als klein. Ein Lévy-Prozess  $X$  lässt sich also darstellen als **► Gleichung 01**, wobei  $\nu$  das Lévy-Maß (siehe Teil 3 dieser Serie für eine Definition) von  $X$  ist und  $\Delta X$  die Sprünge von  $X$  beschreibt. Diese Aufteilung in die vier Komponenten ist für ein vorgegebenes  $\varepsilon$  eindeutig.

Schaut man sich aus praktischer Sicht diese vier Teile im Einzelnen an (vgl. **► Gleichung 01**), so kann man sehr leicht mit dem Drift und der Diffusion umgehen. Bei einem Lévy-Prozess treten in einem endlichen Zeitraum nur endlich viele große Sprünge auf, und somit sind auch die großen Sprünge greifbar und können durch einen einfach zu simulierenden zusammengesetzten Poisson-Prozess modelliert werden. Lediglich die kleinen Sprünge machen Sorgen, wenn man bedenkt, dass es unendlich viele davon geben kann. Betrachtet man die Summe aller kleinen Sprünge in einem endlichen Zeitraum, dann ist es sogar möglich, dass diese nicht konvergiert, und somit ist nicht einmal die Summe der kleinen Sprünge handhabbar. Das ist auch der Grund, warum man immer die kompensierten kleinen Sprünge betrachtet, also die Summe der kleinen Sprünge bereinigt um einen Drift. Dieser Drift kann wiederum selbst unendlich groß werden, damit die Summe aus kleinen Sprüngen und kompensierendem Drift im Erwartungswert verschwindet. Man könnte die kompensierten kleinen Sprünge also als ein zusätzliches Rauschen ansehen und genau das ist die perfekte Motivation für den folgenden Abschnitt.

### Approximation der kleinen Sprünge

Die simpelste Möglichkeit mit den kleinen Sprüngen umzugehen ist es, sie einfach zu

$$X(t) = at + \sigma W(t) + \sum_{s \leq t} \Delta X(s) \mathbb{1}_{|\Delta X(s)| \geq \varepsilon} + \left( \sum_{s \leq t} \Delta X(s) \mathbb{1}_{0 < |\Delta X(s)| < \varepsilon} - t \int_{0 < |x| < \varepsilon} x \nu(dx) \right),$$

**► Gleichung 02**

$$\tilde{X}^\varepsilon(t) = at + \sigma W(t) + \sum_{s \leq t} \Delta X(s) \mathbb{1}_{\{|\Delta X(s)| \geq \varepsilon\}} + \sigma(\varepsilon) \tilde{W}(t),$$

ignorieren und sich nur um alle Sprünge größer  $\varepsilon$  zu kümmern. Offensichtlich macht man dabei zwar einen beachtlichen Fehler, allerdings konvergiert der neugeschaffene Prozess ohne kleine Sprünge, nennen wir ihn  $X^\varepsilon$ , für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen den eigentlichen Lévy-Prozess mit unendlicher Aktivität und rechtfertigt somit diese sehr pragmatische Vorgehensweise. Das Problem hierbei ist allerdings, dass man, abhängig vom Anwendungsfall, ein sehr kleines  $\varepsilon$  wählen muss, um nahe genug an das Originalmodell heranzukommen. Ein kleines  $\varepsilon$  heißt dann aber auch, dass sehr viele Sprünge als groß kategorisiert werden, was zu einem enormen Simulationsaufwand führt.

Eine hervorragende Alternative zu dieser rudimentären Methode basiert auf den Beobachtungen von Rydberg [vgl. Rydberg 1997]. Die kompensierten kleinen Sprünge lassen sich nämlich durch eine geeignet skalierte Brown'sche Bewegung approximieren. Diese Beobachtungen wurden dann von Asmussen und Rosinsky [vgl. Asmussen und Rosinsky 2001] präzisiert. Sie leiteten einen zentralen Grenzwertsatz für die kleinen Sprünge her, der besagt, dass sich die kompensierten Sprünge, skaliert mit ihrer Standardabweichung, stochastisch ähnlich verhalten wie eine Standardnormalverteilung. Folglich können wir uns einen neuen Lévy-Prozess zusammenbauen, indem wir den Drift, den Diffusionsteil und die großen Sprünge des ursprünglichen Lévy-Prozesses übernehmen, und anstatt der kleinen Sprünge addieren wir eine neue unabhängige Brown'sche Bewegung, die mit der Standardabweichung der kleinen Sprünge skaliert wird. Dieser neue Lévy-Prozess, nennen wir ihn  $\tilde{X}^\varepsilon$ , besitzt nun keine Sprünge mehr, die kleiner sind als  $\varepsilon$ . Somit ist dieser Prozess endlich aktiv. Damit gibt es auch kein Problem mehr bei der Simulation dieses Prozesses, da es sich hier nun um einen Sprung-Diffusionsprozess handelt, welcher von zwei unabhängigen

Brown'schen Bewegungen und einem zusammengesetzten Poisson-Prozess getrieben wird, das heißt  $\tilde{X}^\varepsilon$  ist definiert durch **► Gleichung 02**, wobei  $\tilde{W}$  die neue Brown'sche Bewegung bezeichnet,  $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$  für die Indikatorfunktion steht und  $\sigma(\varepsilon)$  den Skalierungsfaktor darstellt, welcher gegeben ist durch  $\sigma^2(\varepsilon) = \int_{0 < |x| < \varepsilon} x^2 \nu(dx)$ .

Da  $\sigma(\varepsilon)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert, konvergiert auch  $\tilde{X}^\varepsilon(t)$  gegen den ursprünglichen Lévy-Prozess, genauso wie die einfache Approximation  $X^\varepsilon$ . Allerdings konvergiert  $\tilde{X}^\varepsilon$  in den meisten Fällen sehr viel schneller und ist deshalb oft der rudimentären Methode vorzuziehen. Welche Approximation tatsächlich die bessere ist, hängt von dem ursprünglich betrachteten Lévy-Prozess ab. Entscheidend hierbei ist das Verhalten der kleinen Sprünge, genauer, die Geschwindigkeit der Konvergenz von  $\sigma(\varepsilon)$  gegen 0. Später werden wir diese Aussage präzisieren und uns dies anhand einiger Beispiele anschauen.

Für Simulationszwecke haben wir also zwei schöne Methoden gefunden, um mit den kleinen Sprüngen umzugehen. Die Frage ist nun allerdings, ob diese Approximation auch zur Optionspreisberechnung verwendet werden kann und sinnvolle Ergebnisse liefert. Wir fragen uns also, ob die Optionspreise im  $X^\varepsilon$ -Modell, beziehungsweise im  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Modell auch gegen die Optionspreise des ursprünglichen Lévy-Modells konvergieren und falls das der Fall ist, mit welcher Geschwindigkeit. Genau dies werden wir im nächsten Abschnitt beantworten, und vor allem klären wir die Frage, unter welchen Umständen die eine Methode der anderen vorzuziehen ist.

### Wie robust sind die Optionspreise?

Mithilfe des folgenden Theorems können wir dies beantworten: Einen Beweis findet der interessierte Leser zum Beispiel in dem Buch von Cont und Tankov [vgl. Cont und Tankov 2004].

**Theorem**

Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion auf den reellen Zahlen mit beschränkter Ableitung, das heißt  $|f'(x)| \leq K$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und einer positiven Konstanten  $K$ . Dann gilt

$$1) |E[f(X(T)) - f(X^\varepsilon(T))]| \leq K\sqrt{T}\sigma(\varepsilon),$$

$$2) |E[f(X(T)) - f(\tilde{X}^\varepsilon(T))]| \leq KA\rho(\varepsilon)\sigma(\varepsilon),$$

wobei  $\rho(\varepsilon) := \frac{1}{\sigma^3(\varepsilon)} \int_{0 < |x| < \varepsilon} |x|^3 \nu(dx)$  und  $A$  eine weitere Konstante kleiner 16,5 ist.

Dieses Theorem liefert zunächst eine Abschätzung über die Genauigkeit der beiden Approximationen, wenn man als Funktion  $f$  die Identität, also  $f: x \rightarrow x$ , verwendet. Die Konstante  $K$  wird dann zu eins. Auch für eine allgemeiner gewählte Funktion  $f$ , etwa eine Payout-Funktion einer Option, bekommen wir interessante Aussagen über die Konvergenz von Optionspreisen. Typischerweise sind solche Payout-Funktionen nicht differenzierbar, so ist beispielsweise die Ableitung der Payout-Funktion von Call- oder Put-Optionen am Strike nicht definiert. Dies macht das Theorem in der Form, wie es hier steht, nicht anwendbar für die allermeisten Optionen. Allerdings lässt sich auch eine allgemeinere Version des Theorems herleiten. Es ist zum Beispiel auch zulässig, dass die Funktion  $f$  in nur endlich vielen Punkten keine Ableitung besitzt. Und somit können wir damit auch das Konvergenzverhalten der Optionspreise bestimmen.

Vergleicht man die Geschwindigkeit der Konvergenz beider Methoden, so fällt auf, dass die Genauigkeit der  $X^\varepsilon$ -Approximation von der Zeit  $T$  abhängt, was bei der  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode nicht der Fall ist. Das hängt damit zusammen, dass die Varianz der kleinen Sprünge linear in der Zeit wächst. Mithilfe des oben erwähnten zentralen Grenzwertsatzes, kann man sich dieser Zeitabhängigkeit bei der  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode entledigen. Um entscheiden zu können, welche Methode die bessere ist, müssen wir den Ausdruck  $\rho(\varepsilon)$  unter die Lupe nehmen. Es lässt sich leicht zeigen, dass  $\rho(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}$ . Wenn also für  $\varepsilon \rightarrow 0$  auch  $\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}$  gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode schneller. Es ist in diesem Fall also sinnvoll, die kleinen Sprünge nicht nur wegzulassen, sondern sie mit einer geeigneten Brown'schen Bewegung zu kompensieren. Somit ist das Konvergenzverhalten von  $\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)}$  ausschlaggebend dafür, welche Approximationsmethode wir

benutzen sollten. Dies hängt nur vom gewählten unendlich aktiven Lévy-Prozess ab. Für die meisten gängigen Prozesse gilt jedoch, dass  $\varepsilon$  schneller verschwindet als  $\sigma(\varepsilon)$ , was für die  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode spricht. Zu den bekanntesten unendlich aktiven Lévy-Prozessen gehören zum Beispiel der NIG (Normal Invers Gaussian)-Prozess, der  $\alpha$ -stabile Lévy-Prozess, der CGMY-Prozess und der Gamma-Prozess. Diese Prozesse sind uns in früheren Teilen dieser Serie über Sprungprozesse bereits begegnet. Der interessierte Leser findet Details über diese Modelle beispielsweise in den Artikeln von Barndorff-Nielsen [vgl. Barndorff-Nielsen 1998], Eberlein [vgl. Eberlein 2001] und Carr et al. [Carr et al. 2002] oder in den Büchern von Cont und Tankov [vgl. Cont und Tankov 2004] und Sato [vgl. Sato 1999]. Im Folgenden schauen wir uns die Modelle hinsichtlich ihrer Konvergenzgeschwindigkeit genauer an. Die betrachteten Prozesse sind reine Sprungprozesse, besitzen also keine Brown'sche Komponente.

**Beispiel: NIG-Prozess**

Der NIG-Lévy-Prozess wird typischerweise durch die drei Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ , und  $\delta$  beschrieben. Es muss gelten, dass  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$ , und  $|\beta| \leq \alpha$ . Das Lévy-Maß hat die Form gemäß **Gleichung 03**, wobei  $K_1$  die modifizierte Bessel-Funktion zweiten Grades mit Parameter 1 beschreibt.

**► Gleichung 03**

$$\nu(x) = \frac{\delta \alpha}{\pi |x|} e^{\beta x} K_1(\alpha x),$$

Aus dem Lévy-Maß können wir dann  $\sigma(\varepsilon)$  und  $\rho(\varepsilon)$  bestimmen, und es lässt sich zeigen, dass  $\sigma(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$  und  $\rho(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$  gilt und somit konvergiert die  $X^\varepsilon$ -Methode mit einer Rate von  $\sqrt{\varepsilon}$  und die  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode mit einer Rate von  $\varepsilon$  und damit deutlich schneller.

**Beispiel: Symmetrischer  $\alpha$ -stabiler Lévy-Prozess**

Der symmetrische  $\alpha$ -stabile Lévy-Prozess wird durch zwei Parameter  $\alpha$  und  $\sigma$  mit

**► Gleichung 04**

$$\nu(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha/2)} \left( \frac{1}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{x>0\}} + \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{x<0\}} \right),$$

$0 < \alpha \leq 2$  und  $\sigma > 0$  beschrieben. Das Lévy-Maß besitzt die Form gemäß **Gleichung 04**, wobei  $\Gamma$  die Gamma-Funktion beschreibt.

Auch hier können wir das Konvergenzverhalten von  $\sigma(\varepsilon)$  und  $\rho(\varepsilon)$  bestimmen und erhalten  $\sigma(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-\alpha/2}$  und  $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha/2}$ . Schon wieder ist die  $\tilde{X}^\varepsilon$ -Methode die bessere Wahl und konvergiert mit einer Rate von  $\varepsilon$ . Allerdings konvergiert  $\sigma(\varepsilon)$  für  $\alpha \rightarrow 0$  gegen 0. Für sehr kleine Werte für  $\alpha$  ist es also durchaus sinnvoll, die einfachere  $X^\varepsilon$ -Methode zu benutzen, da sich das Konvergenzverhalten dadurch kaum verschlechtert. Die Verbesserung, die das Modellieren einer zusätzlichen Brown'schen Bewegung liefert ist in diesem Fall dann marginal.

**Beispiel: CGMY-Prozess**

Der CGMY-Prozess wird, wie der Name schon sagt, durch die vier positiven Parameter  $C$ ,  $G$ ,  $M$  und  $Y$  bestimmt. Der Parameter  $Y$  muss zudem noch kleiner als 2 sein. Das Lévy-Maß nimmt dann die in **Gleichung 05** wiedergegebene Form an.

**► Gleichung 05**

$$\nu(x) = C|x|^{-1-Y} e^{-(G\mathbb{1}_{\{x<0\}} + M\mathbb{1}_{\{x>0\}})|x|}.$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit verhält sich ähnlich zum vorangegangenen Beispiel. Es gilt nämlich, dass  $\sigma(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-Y/2}$  und  $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^{Y/2}$ . Und damit gelten die gleichen Beobachtungen wie für den  $\alpha$ -stabilen Lévy-Prozess.

**Beispiel: Gamma-Prozess**

Der Gamma-Prozess besitzt zwei positive Parameter  $c$  und  $\lambda$  und hat das Lévy-Maß  $\nu(x) = \frac{c e^{-\lambda x}}{x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ .

Asymptotisch verhält sich  $\sigma(\varepsilon)$  wie  $\varepsilon$ , also  $\sigma(\varepsilon) \sim \varepsilon$ . Das asymptotische Verhalten von  $\rho(\varepsilon)$  gleicht allerdings einer Konstanten. Somit bringt die zusätzliche Einführung einer Brown'schen Bewegung keine Verbesserung und die einfache  $X^\varepsilon$ -Approximation ist hier die Methode der Wahl.

Wie in den Beispielen gesehen, kann es einen signifikanten Unterschied in der Approximationsgüte zwischen den beiden Methoden geben. In ► **Abb. 01** und ► **Abb. 02** kann man zwei typische Pfade eines unendlich aktiven Lévy-Prozesses sehen. Hier handelt es sich um  $\alpha$ -stabile Lévy-Prozesse mit den Parametern  $\sigma=1$  und  $\alpha=1,2$  (► **Abb. 01**), beziehungsweise  $\alpha=1,9$  (► **Abb. 02**). Alle Sprünge mit einer absoluten Höhe kleiner als  $\varepsilon=0,0001$  werden hier durch eine Brown'sche Bewegung approximiert. Wir haben bereits theoretisch gesehen, dass es für kleine Werte für  $\alpha$  es durchaus Sinn macht, den Prozess durch einen reinen zusammengesetzten Poisson-Prozess zu approximieren. Dies deutet sich auch schon beim bloßen Betrachten der Pfade an. Der Pfad in ► **Abb. 01** ähnelt sehr viel mehr einem zusammengesetzten Poisson-Prozess als der Pfad in ► **Abb. 02**, der sehr viel mehr nach einem Pfad einer Brown'schen Bewegung aussieht, was unsere theoretischen Ergebnisse bestätigt. □

## Fazit und Ausblick

Dieses Kapitel setzte sich mit den Lévy-Prozessen auseinander, die unendlich oft springen. Der Umgang mit solchen Prozessen scheint auf den ersten Blick sehr kontraintuitiv. Deshalb haben wir uns zwei schöne Approximationsmethoden angeschaut, mit deren Hilfe man unendlich aktive Lévy-Prozesse durch endlich aktive Lévy-Prozesse annähern kann. Dies lässt dann eine sehr einfache und effiziente Pfadsimulation zu. Zudem kann man Fehler-schätzer, also Worst-Case-Abschätzungen des Approximationsfehlers von Optionspreisen, die durch Monte-Carlo-Simulationen bestimmt werden, angeben.

## Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

**Asmussen, S./Rosinski, J. (2001):** *Approximations of small jump Lévy processes with a view towards simulation*. *J. Appl. Prob.*, 38, pp. 482–493.

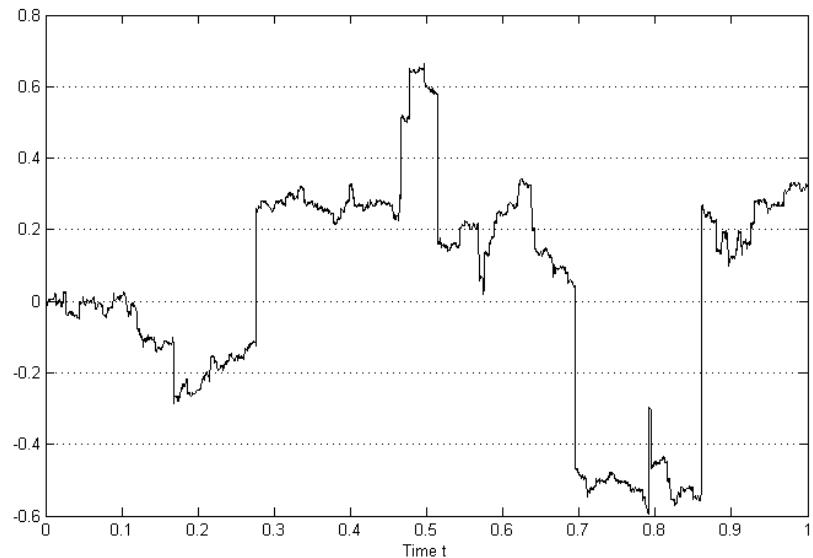
**Barndorff-Nielsen, O. E. (1998):** *Processes of normal inverse Gaussian type*. *Finance Stoch.*, 2(1), pp. 41–68.

**Carr, P./Geman, H./Madan, D./Yor, M. (2002):** *The fine structure of asset returns: an empirical investigation*. *J. Business*, 75(2), pp. 305–332.

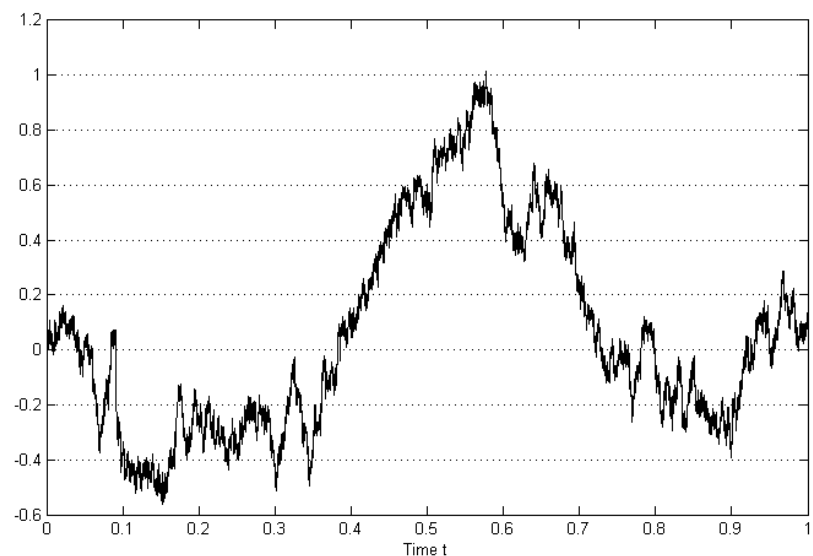
**Cont, R./Tankov, P. (2004):** *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman Hall.

**Eberlein, E. (2001):** *Applications of generalized hyperbolic Lévy motion to finance*, in: *Lévy Processes – Theory and*

► **Abb. 01**  
 **$\alpha$ -stabiler Lévy-Prozess mit den Parametern  $\sigma=1$  und  $\alpha=1,2$**



► **Abb. 02**  
 **$\alpha$ -stabiler Lévy-Prozess mit den Parametern  $\sigma=1$  und  $\alpha=1,9$**



*Applications*, Barndorff-Nielsen, O. E./Mikosch, T./Resnick, S. (eds.), Birkhäuser: Boston, 2001, pp. 319–336.

**Rydberg, T. H. (1997):** *The normal inverse Gaussian Lévy process: simulation and approximation*. *Comm. Stat. Stoch. Models*, 13, pp. 887–910.

**Sato, K.-I. (1999):** *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.

### Die Autoren:

**Dr. Asma Khedher und Thorsten Schulz** sind Wissenschaftler am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Sie sind Autoren zahlreicher

Fachpublikationen in den Gebieten Finanz- und Versicherungsmathematik, Risikomanagement und Stochastik. Im Rahmen des KPMG Center of Excellence in Risk Management widmen sie sich aktuellen Fragestellungen des modernen Risikomanagements.

Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches die Stellen von Asma Khedher und Thorsten Schulz teilfinanziert werden.