

Auszug Publikationen 2005



- Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen



Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen

Prof. Dr. Rüdiger Kiesel / Dr. Michael Lesko / Clemens Prestele

Josef Gruber / Walter Gruber / Hendryk Braun (Hrsg.): *Praktiker-Handbuch – Asset-Backed-Securities und Kreditderivate*

1 Einleitung

Collateralised Debt Obligations (CDOs) sind eine spezielle Variante der Asset-Backed Securities (ABSs). Die ABSs und insbesondere die CDOs (v. a. in der Ausprägung CLO) haben sich in den letzten Jahren zu einer der bedeutendsten Klasse von Wertpapieren auf dem Markt für Wertpapiere (festverzinslich und variabel verzinslich) entwickelt (siehe FT, 1.12.2004). Auf den europäischen Märkten etwa hat sich die Emission von CDOs mehr als verzehnfacht.

Eine Ursache dieses rapiden Wachstums ist sicherlich, vor allem in den letzten Jahren, die „hunt-for-yield“, d.h. die Suche vor allem von Versicherungen und Pensionsfonds nach Investitionsmöglichkeiten im festverzinslichen Bereich, die eine ausreichende Verzinsung bieten. Für die Investoren sind die Marktgerechtigkeit der Preise (Bewertung) der CDOs und die mit CDOs verbundenen Risiken auf Grund der Komplexität dieser Strukturen nicht vollständig transparent.

Eine Collateralized Debt Obligation (CDO) ist eine Verbriefung von bestimmten Assets (z. B. Kredite) indem ein Pool von Assets via einer Zweckgesellschaft (Special Purpose Vehicles (SPV)) in handelbare tranchierte Wertpapiere umgewandelt wird, deren Performance vom Pool der Assets abhängt. Da den CDOs ein Portfolio von Assets zugrunde liegt, werden im Gegensatz zur Bewertung einfacher Wertpapiere oder Kredite nicht nur die Kontrahentenausfallwahrscheinlichkeit (PD) und die emssionsspezifische Verlustquote (LGD) benötigt, sondern zusätzlich auch die Abhängigkeiten innerhalb des zugrunde liegenden Portfolios. Daher werden zur Analyse von CDOs folgende Größen benötigt:

- Ausfallwahrscheinlichkeiten je Asset,
- Verlustquote (LGD) je Asset,
- Paarweise Default Abhängigkeiten zwischen den Assets,
- Default Zeitpunkt.

Ziel dieses Beitrages ist es, einen bedeutenden Bestandteil dieser Risiken, nämlich das Abhängigkeitsrisiko (oder Korrelationsrisiko), genauer zu beleuchten.

Dazu stellen wir zunächst Modellierungsansätze für Anleihen mit Kreditrisiko (Corporate Bonds), d.h. für die Objekte des zugrunde liegenden Assetpool vor. Wir betrachten dann die Modellierung von Abhängigkeiten im Rahmen der vorgestellten Ansätze. Wir diskutieren insbesondere warum Korrelationen als Maß für Abhängigkeitsstrukturen nicht ausreichen. Dazu beschreiben wir das Konzept der Copulafunktion intensiv und stellen verschiedene Ansätze zur flexibleren Modellierung von Abhängigkeiten vor.

2 Modellierung von Kreditportfolios

2.1 Strukturelle Modelle: Merton

Die strukturellen Modelle gehen auf die Arbeiten von Black & Scholes (1973) und Merton (1974) zurück. In diesen Modellen ist eine Grundannahme, dass der Wert $V(t)$ einer Firma sich nur aus dem Wert einer homogenen Gruppe von Aktien mit Gesamtwert $S(t)$ und einer einzigen Null-Kupon Anleihe mit Wert $D(t)$, jeweils zum Zeitpunkt t , zusammensetzt. Damit ergibt sich $V(t)$ durch Addition von $S(t)$ und $D(t)$ für alle Zeitpunkte t . Ein Ausfall der Anleihe wird durch das Unterschreiten einer Schranke durch den Firmenwert ausgelöst. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses kann unter geeigneten Modellannahmen bestimmt werden. Im Merton Modell wird für den Wert der Firma eine stochastische Dynamik der Form

$$dV(t) = (r - \delta)V(t)dt + \sigma V(t)dW(t)$$

vorausgesetzt, wobei r den konstanten risikolosen Zins, δ eine konstante Auszahlungsrate, wie z.B. Dividendenzahlungen, σ die Volatilität des Firmenwertes V und W eine Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess) darstellen.

An die Anleihe stellen wir die Anforderung, dass ein Ausfall nur zur Fälligkeit T möglich ist. Bezeichnen wir den Nennwert der Anleihe mit F , so ergeben sich folgende Möglichkeiten für den Wert $D(T)$ der Anleihe zum Zeitpunkt T :

Ist der Firmenwert bei Fälligkeit größer als oder identisch zur Verbindlichkeit, d.h. $V(T) \geq F$, dann wird die Anleihe vollständig zurückgezahlt:

$$D(T) = F.$$

Ist der Firmenwert geringer als der Nennwert, d.h. $V(T) < F$, so können nur noch Zahlungen in Höhe des Firmenwertes geleistet werden:

$$D(T) = V(T).$$

Deshalb können wir den Nennwert F als Schranke für den Firmenwert ansehen, bei deren Unterschreitung der Zahlungsausfall ausgelöst wird. Der Zeitpunkt zu dem ein Ausfall stattfinden kann, wird (mathematisch) als eine Stoppzeit τ angesehen und kann im Merton Modell daher nur der Fälligkeitszeitpunkt T sein.

Da die Auszahlungen zum Zeitpunkt T für den Halter als

$$D(T) = \min\{F, V(T)\} = F - \max\{F - V(T), 0\}$$

und für den Eigenkapitalgeber als

$$S(T) = V(T) - D(T) = \max\{V(T) - F, 0\}.$$

geschrieben werden können, lassen sich Optionstheoretische Resultate verwenden und es gilt für die Anleihe:

Unter den oben getroffenen Annahmen können Null-Kupon Anleihen als Differenz einer risikolosen Zahlung minus einer (europäischen) Put-Option auf den Firmenwert mit Ausübungspreis F angesehen werden. Damit ergibt sich der Wert $p^d(t, T)$ einer Null-Kupon Anleihe mit Nennwert F und Fälligkeit T zum Zeitpunkt t als

$$\begin{aligned} p^d(t, T) &= Fe^{-r(T-t)} - P_E(V(t), F) \\ &= Fe^{-r(T-t)} - \{V(t)e^{-\delta(T-t)} \phi(-d_1) + Fe^{-r(T-t)} (-d_2)\} \\ &= V(t)e^{-\delta(T-t)} \phi(-d_1) + Fe^{-r(T-t)} \phi(d_2), \end{aligned}$$

wobei, wie in der Black-Scholes Welt, die Größen d_1 und d_2 wie folgt definiert sind:

$$d_1 = \frac{\log(V(t) / F) + (r - \delta + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = d_2 + \sigma \sqrt{T - t}.$$

ϕ stellt die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung dar.

Wir können nun aus dem Wert $p^d(t, T)$ der Null-Kupon Anleihe direkt die Spreads $S(t, T)$ berechnen, die sich implizit durch die Formel $p^d(t, T) = Fe^{-(r+S(t, T))(T-t)}$ ergeben. Damit ist

$$S(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log \left[\frac{p^d(t, T)}{Fe^{-r(T-t)}} \right] = -\frac{1}{T-t} \log \left[\frac{1}{l_t} e^{-\delta(T-t)} \phi(-d_1) + \phi(d_2) \right]$$

wobei das Verhältnis zwischen Fremdkapital und Firmenwert (der sogenannte „leverage-ratio“) durch

$$l_t = \frac{F_t}{V(t)} = \frac{Fe^{-r(T-t)}}{V(t)}$$

definiert ist. Der Ansatz über die Spreads bewirkt, dass sich Kreditrisiko-behaftete Anleihen mit den gleichen Techniken bewerten lassen wie risikolose Anleihen. Der einzige Unterschied ergibt sich durch den veränderten Zins $r + S(t, T)$, der bei der Diskontierung anzusetzen ist anstatt dem bisherigen Zins r . Die Stetigkeit der Pfade des Wiener-Prozesses W bewirkt jedoch, dass zu Zeitpunkten, die kurz vor der Fälligkeit liegen, bereits alles über das Auftreten eines Ausfalles bekannt ist. Dieses hat

zur Folge, dass die Spreads $S(t, T)$ gegen Null konvergieren, falls die Restlaufzeit gegen Null geht. Nur für Firmen mit einem Leverage-ratio größer als oder gleich 1 tendieren die Spreads mit Verkürzung der Restlaufzeit gegen Unendlich. Das Verhalten der Spreads ist in Abbildung 1 für verschiedene Leverage-ratio-Niveaus dargestellt.

1. Spreads im Verhältnis zur Restlaufzeit



Spreads im Vergleich zur Restlaufzeit für Leverages l_t von 1.01, 0.82 und 0.7, Volatilität σ von 20% und risikolosem Zins r von 5% (Zinsrate $d = 0$)

2.2 Intensitäts-basierende Modelle

Die Intensitäts-basierenden (oder reduced-form) Modelle entstanden aus der Idee, den Zeitpunkt τ des Ausfalles einer Firma als ersten Sprung eines Poisson-Prozesses $N = (N_t)_{t \geq 0}$ mit Intensität $\lambda > 0$ zu modellieren. Der Ausfallszeitpunkt wird hierbei durch

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda ds \geq E_1\}$$

modelliert, wobei E_1 eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1, kurz $Exp(1)$ -verteilte Zufallsvariable, ist. Dann gilt

$$P(\tau \leq u) = P\left(\int_0^u \lambda ds \geq E_1\right) = P(E_1 \leq \lambda u) = 1 - \exp\{-\lambda u\}$$

d.h. τ ist $Exp(\lambda)$ -verteilt und kann als erster Sprung eines Poisson-Prozesses angesehen werden. Unter einem solchen Modellansatz ist die Ursache für den Ausfall einer Anleihe exogen, d.h. wird nicht durch das Modell selbst beschrieben (Dies ist ein Unterschied zum strukturellen Modell in dem der Ausfall endogen, d.h. im Modell beschrieben wird).

Will man den Ausfall mit ökonomischen Variablen in Verbindung bringen, bietet sich eine Modellierung mittels Cox-Prozessen an. Hier hängt die Intensität von einem stochastischen Prozess einer Zustandsvariablen $(X_t)_{t \geq 0}$ ab und die Intensität wird durch eine Funktion $\lambda(X_t)$ beschrieben. Wir definieren dann den Ausfallszeitpunkt τ , der sich nun aus dem Prozess $(\lambda(X_t))_{t \geq 0}$ ergibt, durch

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda(X_s) ds \geq E_1\}.$$

Einen Sprungprozess $N = (N_t)_{t \geq 0}$, der nun diese stochastische Größe $\lambda(X_t)$ als Intensität hat, nennt man Cox-Prozess.

Nun lassen sich die Ausfallwahrscheinlichkeiten nach einem beliebigem Zeitpunkt u unter Kenntnis des Prozesses X_t , $t \leq u$ berechnen (wir bezeichnen diese Information kurz mit G_u):

$$\begin{aligned} P(\tau > u | G_u) &= P\left(\int_0^u \lambda(X_s) ds < E_1 | G_u\right) = P\left(E_1 > \int_0^u \lambda(X_s) ds | G_u\right) \\ &= \exp\left\{-\int_0^u \lambda(X_s) ds\right\} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass man die Größe unter unseren Annahmen vollständig. Somit ergibt sich für die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$P(\tau \leq u) = 1 - E\left[\exp\left\{-\int_0^u \lambda(X_s) ds\right\}\right]$$

Wir wollen nun ein Beispiel für die Bewertung einer Null-Kuponanleihe in dem Cox-Prozess Modell geben. Dazu sei $(r_t)_{t \geq 0}$ die von $(X_t)_{t \geq 0}$ unabhängige stochastische kurzfristige Zinsrate (short rate). Dann ist der Preis einer kreditrisikolosen Null-Kuponanleihe mit Nennwert 1 und Fälligkeit T zum Zeitpunkt 0 gegeben durch

$$p(0, T) = E\left[\exp\left\{-\int_0^T r_s ds\right\}\right]$$

Bei unveränderten Werten ist der Preis zum Zeitpunkt 0 für eine risikobehaftete Anleihe gleich

$$\begin{aligned} p^d(0, T) &= E\left[\exp\left\{-\int_0^T r_s ds\right\} \cdot 1_{\{\tau > T\}}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\int_0^T r_s ds\right\}\right] \cdot E\left[\exp\left\{-\int_0^T \lambda(X_s) ds\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\int_0^T (r_s + \lambda(X_s)) ds\right\}\right] \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $1_{\{\tau > T\}}$ die Indikatorfunktion, die gleich Eins ist, falls $\tau > T$ gilt, und gleich Null im Fall von $\tau \leq T$. Analog dazu ist die Indikatorfunktion 1_A für beliebige Mengen A definiert.

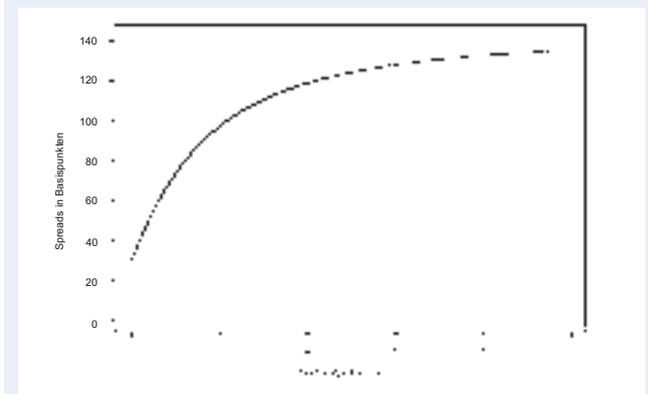
Somit wurde bei der Bewertung risikobehafteter Anleihen nur die stochastische short rate um die Intensität $\lambda(X_t)$ additiv verändert.

Wir können nun auch in diesem Modell die Credit-Spreads berechnen:

$$S(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log\left[\frac{p^d(t, T)}{p(t, T)}\right] = -\frac{1}{T-t} \log\left[E\left[\exp\left\{-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right\} | G_t\right]\right]$$

In Abbildung 2 haben wir für ein spezielles Beispiel dieses Ansatzes die Spreads gegen die Restlaufzeit gezeichnet.

2. Spreads im Verhältnis zur Restlaufzeit



Spreads im Vergleich zur Restlaufzeit für folgende Parameter der CIR-Dynamik: mean-reversion rate $a=1$, mean-reversion level $\mu = 0.015$ Volatilität $\sigma = 0.2$, und Startwerte des Prozesses 0.003, 0.005 und 0.01. Diese Werte entsprechen einer einjährigen Ausfallwahrscheinlichkeit von ca. 0.7%, 0.9% bzw. 1.2%.

Unter schwachen Annahmen an den Intensitäten-Prozess $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ kann man für reduced-form Modelle zeigen, dass

$$\lim_{T \downarrow t} S(t, T) = \lambda_t$$

gilt, falls bis zum Zeitpunkt t kein Ausfall eingetreten ist. Das heißt, dass die Spreads nicht gegen Null tendieren bei einer sich verkürzenden Restlaufzeit. Somit erlauben die reduced-form Modelle die Möglichkeit eines Ausfalles auch kurz vor der Fälligkeit eines Kreditkontraktes.

3 Modellierung von Abhängigkeiten

3.1 Grundlegende Überlegungen

Bei der Bewertung von Derivaten, die sich auf ein komplettes Portfolio von Kreditverträgen beziehen, spielt neben dem individuellen Ausfallverhalten der einzelnen Firmen besonders die Modellierung von ökonomischen Abhängigkeiten der betrachteten Firmen eine zentrale Rolle. Je nach Modell für die Abhängigkeitsstruktur ergeben sich zum Teil sehr unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für zeitnahe oder zeitgleiche Ausfälle zweier oder mehrerer Firmen. Dieses impliziert dementsprechend auch stark von einander abweichende Preise für Produkte wie z.B. first-to-default swaps. Ein weiterer Grund für eine genaue Analyse der verwendeten Abhängigkeitsstruktur besteht in der Tatsache, dass oft ein Portfolio referenziert wird, in dem sich mehrere hundert Kontrakte befinden. Diese Portfoliogröße zieht enorme computertechnische Anstrengungen bei der Analyse oder Bewertung komplexer Kreditstrukturen nach sich.

Solange man, wie im klassischen Merton-Modell, stochastische Unsicherheiten durch Wiener-Prozesse beschreibt, folgen Transformationen der Firmenwerte einer Normalverteilung. Diese wird eindeutig durch Erwartungswert und Varianzen beschrieben. Bei der Betrachtung eines Portfolios kommen hier noch Korrelationen zwischen den Firmen mit ins Spiel. Allerdings hat sich gezeigt, dass bestimmte Phänomene in einigen Märkten nicht vollständig durch die Wiener-Prozesse und somit durch die mehrdimensionale Normalverteilung abgebildet werden können.

Um speziell das gemeinsame Verhalten separat vom individuellen Verhalten der Firmenkongrate zu untersuchen, bietet es sich an, so genannte Copulafunktionen (oder kurz Copulas) zu betrachten. Wir werden diese Funktionen in Paragraph 3.3 kurz einführen. Sie stellen mittlerweile bei der Analyse von Multi-Namen Kreditkontrakten einen zentralen Baustein dar.

Wir betrachten ein Portfolio mit n Kreditverträgen und diskutieren die Abhängigkeitsstruktur in einem Einperioden-Modell (z.B. ein Jahr). Wir starten also zum Zeitpunkt 0 und bezeichnen mit $T > 0$ den Endzeitpunkt der Periode. Mit $D_i, i = 1, \dots, n$, bezeichnen wir die Zufallsvariablen, die besagen, ob Kontrakt i in der Periode $[0, T]$ ausgefallen ist (dann ist $D_i = 1$) oder noch weiterlebt ($D_i = 0$). Die $D_i, i = 1, \dots, n$ sind somit Bernoulli-Variablen mit Parametern $p_T^{(i)}$.

Während uns in den bisherigen Paragraphen die individuellen Wahrscheinlichkeiten

$$p_T^{(i)} = P(D_i = 1) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

interessiert haben, stehen in diesem Paragraphen die Wahrscheinlichkeiten

$$P(D_1 = \delta_1, \dots, D_n = \delta_n) \text{ für } \delta_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n,$$

bzw. der Zusammenhang dieser mit den individuellen Wahrscheinlichkeiten im Zentrum der Diskussion.

Wir nehmen zuerst als unmittelbare Erweiterung des klassischen Merton-Modells die Dynamik

$$dV^{(i)}(t) = rV^{(i)}(t)dt + \sigma_i V^{(i)}(t)dW^{(i)}(t)$$

für den Wert der Firma i an, wobei analog zu oben die Größen r und σ_i als konstanter risikoloser Zins bzw. individueller Volatilität der Firma i zu interpretieren sind.

Der Prozess $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(n)})'$ stellt einen n -dimensionalen Wiener-Prozess dar, dessen vom Zeitparameter t unabhängige Korrelationsmatrix wir mit $\Gamma = (\rho_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ bezeichnen wollen.

Wir passen Schranken $c_T^{(i)}$, bei deren Unterschreitung durch den Firmenwert $V^{(i)}(T)$ die Firma i in den Konkurs geht, an die individuellen risikolosen Ausfallwahrscheinlichkeit an:

$$p_T^{(i)} = P(D_i = 1) = P(V^{(i)}(T) \leq c_T^{(i)}) = \Phi \left(\frac{\log \left[\frac{c_T^{(i)}}{V^{(i)}(0)} \right] - \left[r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right] T}{\sigma_i \sqrt{T}} \right)$$

für $i = 1, \dots, n$.

Die Schranken $c_T^{(i)}$ konnten wir bei der Bewertung von Null-Kupon Anleihen im klassischen Merton-Modell mit dem Nennwert der Anleihe identifizieren. Wie oben seien die Stoppzeiten τ_i der Zeitpunkt des Ausfalles von Kontrakt i . Wir bezeichnen nun die Verteilungsfunktionen der τ_i mit $F_i, i = 1, \dots, n$. Dann ist der Vektor $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)})'$ mit $B^{(i)} = \Phi^{-1}(F_i(\tau_i))$ n -dimensional normalverteilt mit Erwartungswertvektor 0 und Kovarianzmatrix Γ . Das Ereignis, dass Kontrakt i ausgefallen ist, kann man nun auch mit Hilfe der Zufallsvariablen $B^{(i)}$ und neuer Schranken

$$\tilde{c}_T^{(i)} = \frac{\log \left[\frac{c_T^{(i)}}{V^{(i)}(0)} \right] - \left[r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right] T}{\sigma_i \sqrt{T}}$$

ausdrücken:

$$D_i = \mathbf{1}_{\{V^{(i)}(T) \leq c_T^{(i)}\}} = \mathbf{1}_{\{B^{(i)}(T) \leq \tilde{c}_T^{(i)}\}}$$

Dieser Ansatz ist vorteilhaft, da die Verteilung der $B^{(i)}$ deutlich einfacher zu bestimmen ist als die der $V^{(i)}(T)$.

Geht man von gegebenen Kreditkurven $F_i, i = 1, \dots, n$ und einem Normalverteilten $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)})' \sim N(0, \Gamma)$ aus, so können wir das durch den Merton-Ansatz implizierte mehrdimensionale Verhalten des Vektors $(\tau_1, \dots, \tau_n)'$ der Ausfallszeitpunkte bestimmen, indem wir die Ausfallzeitpunkte durch $\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(B^{(i)}))$ definieren. Die Matrix Γ entspricht dann genau der Korrelationsmatrix für die zugrunde liegenden Wiener-Prozesse.

$$W^{(1)}, \dots, W^{(n)}.$$

Zur Berechnung von Korrelationen zwischen den Kontraktausfällen D_i benötigen wir im nächsten Paragraphen die Wahrscheinlichkeiten $p_T^{(i,j)}$, dass die Kontrakte i und j , $i \neq j$, in der Periode $[0, T]$ ausfallen:

$$p_T^{(i,j)} = P(D_i = 1, D_j = 1) = P(B^{(i)} \leq \tilde{c}_T^{(i)}, B^{(j)} \leq \tilde{c}_T^{(j)}) = \Phi_2 \left[\begin{matrix} \left[\tilde{c}_T^{(i)} \\ \tilde{c}_T^{(j)} \right] \\ \left[0 \\ 0 \right] \end{matrix} ; \begin{matrix} \left[1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{matrix} \right] \right],$$

wobei $\Phi_2(x; \mu, \Sigma)$ die 2-dimensionale Verteilungsfunktion mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ ausgewertet an der Stelle x darstellt.

Eine mehrdimensionale Erweiterung des intensitätsbasierenden Modells ergibt sich wie folgt. Wir modellieren ökonomische Va-

riablen durch einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, wählen Intensitätsfunktionen $\lambda_i(\cdot)$ und geben uns einen Vektor von $Exp(1)$ -verteilten Zufallsvariablen $E = (E_1, \dots, E_n)'$ vor. Mit $(G_t)_{t \geq 0}$ sei erneut der durch $(X_t)_{t \geq 0}$ erzeugte Informationsfluss gemeint. Analog zum eindimensionalen Fall ersetzen wir die Ausfallszeitpunkte τ_i durch

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_i(X_s) ds \geq E_i \right\}.$$

Auch hier gilt

$$P(\tau_i > u \mid X_s, s \leq u) = \exp \left\{ - \int_0^u \lambda_i(X_s) ds \right\}$$

und deshalb

$$P(\tau_i \leq u) = 1 - E \left[\exp \left\{ - \int_0^u \lambda_i(X_s) ds \right\} \right],$$

für $i = 1, \dots, n$.

Falls die Zufallsvariablen E_1, \dots, E_n als unabhängig angenommen werden, ergibt sich, dass

$$P(\tau_1 \leq u_1, \dots, \tau_n \leq u_n \mid X_s, s \leq \max\{u_i, i=1, \dots, n\}) = \prod_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^{u_i} \lambda_i(X_s) ds \right\} \right]$$

und folglich

$$P(\tau_1 \leq u_1, \dots, \tau_n \leq u_n) = E \left[\prod_{i=1}^n \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^{u_i} \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \right]$$

Mit diesen Größen lassen sich neben der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeit $p_T^{(i)}$ in der betrachteten Periode

$$p_T^{(i)} = P(D_i = 1) = P(\tau_i \leq T) = 1 - E \left[\exp \left\{ - \int_0^T \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

auch die Wahrscheinlichkeiten $p_T^{(i,j)}$ berechnen, dass die Kontrakte i und j , $i \neq j$, in der Periode $[0, T]$ ausfallen:

$$p_T^{(i,j)} = P(D_i = 1, D_j = 1) = P(\tau_i \leq T, \tau_j \leq T)$$

$$= E \left[\left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_j(X_s) ds \right\} \right] \right].$$

Diese gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten werden wir im nächsten Paragraphen verwenden.

Wir sehen aus den obigen Rechnungen, dass unter der Annahme der Unabhängigkeit der E_1, \dots, E_n die Ausfallszeitpunkte τ_1, \dots, τ_n auch unabhängig sind, sobald wir den kompletten Verlauf der Zustandsvariablen X kennen. Sind die Zufallsvariablen E_1, \dots, E_n jedoch stochastisch abhängig, so sind die τ_1, \dots, τ_n selbst unter vollständigem Wissen des Verlaufes von X nicht mehr unabhängig.

3.2 Korrelationen

Neben den Korrelationen Γ , die wir bei der Modellbildung des Merton-Ansatzes verwendet haben, interessieren die Korrelationen zwischen den Bernoulli-Variablen $D_i, i = 1, \dots, n$ die angeben, ob Gläubiger i ausgefallen ist oder nicht. Diese werden auch Defaultkorrelationen genannt.

Die Korrelationen zwischen D_i und $D_j, i \neq j$, ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \text{Cor}(D_i, D_j) &= \frac{\text{Cov}(D_i, D_j)}{\sqrt{\text{Var}(D_i)} \sqrt{\text{Var}(D_j)}} \\ &= \frac{P(D_i=1, D_j=1) - P(D_i=1)P(D_j=1)}{\sqrt{P(D_i=1)(1-P(D_i=1))} \sqrt{P(D_j=1)(1-P(D_j=1))}} \\ &= \frac{P_T^{(i,j)} - P_T^{(i)}P_T^{(j)}}{\sqrt{P_T^{(i)}(1-P_T^{(i)})} \sqrt{P_T^{(j)}(1-P_T^{(j)})}} \end{aligned}$$

Die in dieser Formel auftretenden Größen haben wir im letzten Paragraphen für die beiden Modelle bestimmt. Im Einzelnen ergab sich im Merton-Modell

$$p_T^{(i)} = \Phi(\tilde{c}_T^{(i)}) \text{ und } p_T^{(i,j)} = \Phi_2 \left[\begin{pmatrix} \tilde{c}_T^{(i)} \\ \tilde{c}_T^{(j)} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Die Werte im Cox-Modell unter der Annahme der Unabhängigkeit der E_1, \dots, E_n waren

$$p_T^{(i)} = 1 - E \left[\exp \left\{ - \int_0^T \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \text{ und}$$

$$p_T^{(i,j)} = E \left[\left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_j(X_s) ds \right\} \right] \right].$$

3.3 Copulas

Korrelationen sind zur Beschreibung der stochastischen Abhängigkeit zwischen zwei Variablen nicht ausreichend. Betrachten wir etwa zwei unabhängige, Standardnormalverteilte Zufallsvariable Y_1, Y_2 und eine weitere, von diesen Variablen unabhängige, stochastische Größe R mit $E(R^2) = 1$. Definieren wir $Z_i = R * Y_i$ für $i = 1, 2$ dann sind die Variablen Z_1 und Z_2 durch die Variable R verbunden und deshalb nicht mehr unabhängig. Jedoch gilt $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(R^2) * \text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ und die Variablen Z_1 und Z_2 sind folglich unkorreliert.

Aufgrund der ungenügenden Beschreibung von Abhängigkeiten durch Korrelationen greift man bei der Modellierung von mehrdimensionalen Zufallsgrößen $X = (X_1, \dots, X_n)'$ häufig auf den Begriff der Copulafunktionen (oder kurz Copulas) zurück. Eine Definition ist wie folgt:

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)'$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F , d.h. $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und eindimensionalen Randverteilungen F_i für $i = 1, \dots, n$, d.h. $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ für $x_i \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, n$. Die Verteilungsfunktion $C = C_{X_1, \dots, X_n}$ des Vektors $F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)$ heißt dann die Copula von X bzw. von F .

Man kann unter schwachen Annahmen zeigen, dass die Copula C eindeutig durch die Verteilungsfunktion F bestimmt ist und dass

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Da $U_i = F_i(X_i) \sim U[0,1]$ für $i = 1, \dots, n$ stellen Copulas mehrdimensionale Verteilungsfunktionen mit auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilten Randverteilungen dar.

Eine sehr nützliche Eigenschaft der Copulas ist die Tatsache, dass die Copula des Vektors $X = (X_1, \dots, X_n)'$ mit der Copula des Vektors $(\beta_1(X_1), \dots, \beta_n(X_n))'$ übereinstimmt, solange die Funktionen $\beta_i, i = 1, \dots, n$, streng monoton wachsend sind. D.h., die Copula ist invariant unter streng monoton wachsenden Transformationen. Eine detaillierte Einführung in Copulas findet man in Nelsen (1999).

ine wichtige Copulafunktionen ist die Funktion $C^{\prod}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i, u_1, \dots, u_n \in [0,1]$, die so genannte Produktcopula. Sie ist die Copula eines Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)'$, bei dem die Komponenten X_1, \dots, X_n unabhängig sind. Weiterhin ist

$$C_R^G(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), u_1, \dots, u_n \in [0,1]$$

die so genannte Gauß'sche Copula, wobei Φ_R die n -dimensionale Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix R darstellt.

In unserer obigen Merton-Erweiterung erscheint die Gauß'sche Copula auf natürliche Art und Weise. Seien erneut die eindimensionalen Kreditkurven $F_i, i = 1, \dots, n$, ein Zufallsvektor B mit $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)}) \sim N(0, \Gamma)$ und die Ausfallzeitpunkte $\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(B^{(i)})), i = 1, \dots, n$, gegeben. Nehmen wir an, dass die $F_i, i = 1, \dots, n$, streng monoton wachsend sind, so können wir aus der Invarianz der Copulas folgern, dass

$$C_{\tau_1, \dots, \tau_n}^G = C_{B^{(1)}, \dots, B^{(n)}}^G = C_{\tau}^G$$

gilt. Damit lässt sich die gemeinsame Verteilung F des Vektors (τ_1, \dots, τ_n) wie in einem Baukasten durch die Kreditkurven $F_i, i = 1, \dots, n$ zusammen mit der Abhängigkeitsstruktur C_{τ}^G angeben:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C_{\tau}^G(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

4 Umsetzung in Bewertungsverfahren

4.1 Faktor-Modelle

Ein weit verbreiteter Modellierungsansatz für Portfolios von Wertpapieren mit Ausfallrisiko, der sich z.B. bei CreditMetrics oder im Rahmen des Baseler Accord findet, ist ein auf standardnormalverteilten Zufallsvariablen beruhender Faktoransatz. Hier

bei werden die die Wertpapiere (oder Kredite) beschreibenden Kenngrößen über einen Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)'$ modelliert. Des- sen Komponenten werden dargestellt als

$$X_i = \rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} Z_i,$$

mit $Y, Z_i, i = 1, \dots, n$ unabhängigen Gauß'schen (d.h. standardnormalverteilten) Zufallsvariablen. Hier wird die Variable Y als gemeinsamer beeinflussender Faktor aller Objekte im Portfolio und die Z_i als individuelle Einflussgrößen betrachtet. Dieser Ansatz kann mit dem klassischen Merton Ansatz (siehe Sektion 2) zur Bewertung von Unternehmensanleihen assoziiert werden. Der Parameter ρ ist der Korrelationsparameter und spezifiziert im Rahmen des Gauß'schen Modellierungsansatzes die Abhängigkeitsstruktur vollständig. Diese Abhängigkeitsstruktur kann auch mittels einer Gauß'schen Copula beschrieben werden. Eine direkte Folgerung aus der Theorie der Copulafunktion ist daher, dass obiges Modell keine Abhängigkeit extremer Ereignisse (die so genannte „tail dependence“) besitzt. Dies bedeutet, dass gerade im interessierenden Fall eines Ausfalls, der üblicherweise mit dem Unterschreiten einer Schranke durch die Variablen X_i einhergeht, d.h. durch ein extremes Ereignis modelliert wird, die Zufallsvariablen als nahezu unabhängig betrachtet werden können. Allerdings können wir, ohne den Faktoransatz zu verlassen, Tail Dependence in das Modell integrieren. Dazu müssen wir nur alternative Faktor-Verteilungen, wie etwa die einer multivariaten t -Verteilung, annehmen. Ein sehr flexibler, allgemeiner Ansatz ist durch die mean-variance mixture Verteilungen gegeben. Hier ist $X_i = \mu_i(Y) + \sigma_i(Y) Z_i$, wobei Y eine ein-dimensionale Mischungsvariable und $Z_i, i = 1, \dots, m$ unabhängige standardnormalverteilte Variablen (auch unabhängig von Y) sind. Dies führt zu den so genannten elliptischen Copulafunktionen (Details zu diesen Funktionen werden in Bingham, Kiesel, Schmidt (2003) diskutiert).

In Abbildung 3 wird die empirische Verteilung der Ausfälle eines Portfolios von 1000 Anleihen der non-investment Kreditqualität für die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur mittels einer Gauß'schen Copula und einer Student-t-Copula (die Abhängigkeiten von extremen Ereignissen modelliert) verglichen. Es zeigt sich, dass das Kreditrisiko des Portfolios substantiell ansteigt (die empirische Verteilung hat deutlich mehr Wahrscheinlichkeitsmasse im Bereich der hohen Ausfallzahlen).

4.2 Intensitäts-basierende Modelle

In dem in Paragraph 2.2. beschriebenen Intensitätsansatz mittels Cox-Prozesse ist der natürlichste Ansatz zur Modellierung von Abhängigkeiten korrelierte Intensitäten einzufügen. Hierzu nehmen wir an, dass in unserem Pool von m Schuldner der Ausfall von Schuldner i durch den ersten Sprung des Cox-Prozesses $N_i(t)$ ausgelöst wird. Die Abhängigkeit der Ausfälle wird dann durch Korrelation der Intensitäten $\lambda_i(t)$ erreicht. Wieder nehmen wir an, dass die bezüglich der Intensitäten $(\lambda_1(s), \dots, \lambda_m(s))$ bedingten Prozesse unabhängig sind. Dieser Ansatz erlaubt es, explizite Formeln für die gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten anzugeben. Mittels der obigen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
p_T^{(i,j)} &= E \left[\left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_i(X_s) ds \right\} \right] \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_j(X_s) ds \right\} \right] \right] \\
&= 1 - (1 - p_T^{(i)}) - (1 - p_T^{(j)}) + E \left[\exp \left\{ - \int_0^T (\lambda_j(X_s) + \lambda_i(X_s)) ds \right\} \right] \\
&= p_T^{(i)} + p_T^{(j)} + E \left[\exp \left\{ - \int_0^T (\lambda_i(X_s) + \lambda_j(X_s)) ds \right\} \right] - 1.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die maximale Ausfallwahrscheinlichkeit erreicht wird, falls beide Intensitäten vollständig korreliert sind, d.h. falls $\lambda_i(s) = \lambda_j(s) = \lambda(s)$ gilt. Man kann nachrechnen, dass die maximale Ausfallkorrelation, die mit einem solchen Ansatz erreicht werden kann, die Größenordnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten hat (vgl. Schönbucher, 2003). Für viele Anwendungen ist dies allerdings nicht ausreichend!

Ein Ansatz, der dieser Problematik Rechnung trägt, wird in Rogge und Schönbucher (2002) vorgeschlagen. Die wesentliche Idee hierbei ist es, die gemeinsame Verteilung der Ausfallsschranken E_i durch eine Copula festzulegen. Im Fall des Cox-Prozess Aufbaus kann man mit der Copula $C = C_{E_1, \dots, E_n}$ des Vektors (E_1, \dots, E_n) dann folgenden Zusammenhang für die Ausfallzeiten τ_1, \dots, τ_n herleiten:

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 \leq u_1, \dots, \tau_n \leq u_n) &= \\
E \left[C \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^{u_1} \lambda_1(X_s) ds \right\}, \dots, 1 - \exp \left\{ - \int_0^{u_n} \lambda_n(X_s) ds \right\} \right] \right].
\end{aligned}$$

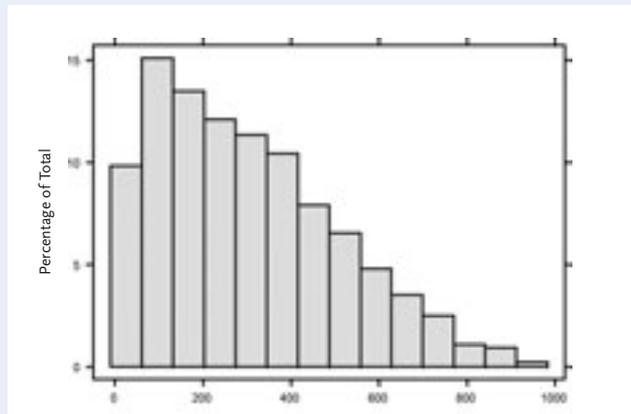
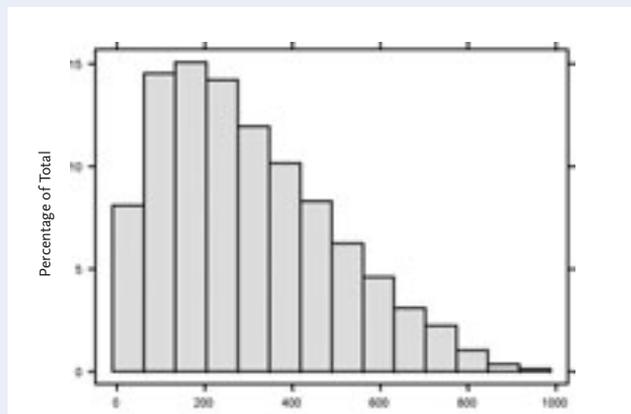
Dies ermöglicht auf natürliche Weise, so genannte Ansteckungseffekte (d.h. Veränderungen der Ausfallwahrscheinlichkeiten, falls Ausfälle stattgefunden haben) ins Modell zu integrieren.

In Abbildung 4 wird erneut die empirische Verteilung der Ausfälle eines Portfolios von 1000 Anleihen der non-investment Kreditqualität für die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur der stochastischen Ausfallsschranken mittels einer Gauß'schen Copula und einer Student-t-Copula dargestellt. Wieder können wir ein deutliches Ansteigen des Kreditrisiko des Portfolios feststellen.

4.3 Allgemeiner Ansatz

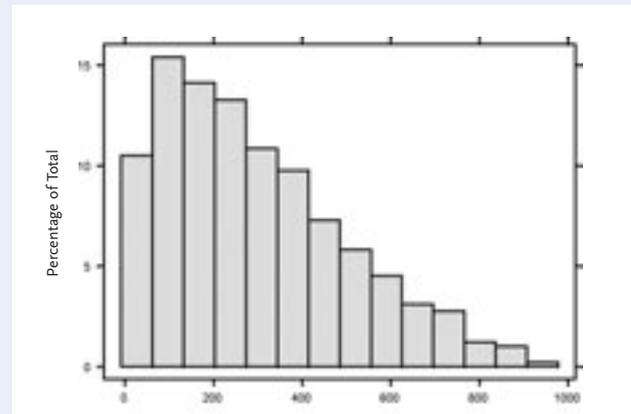
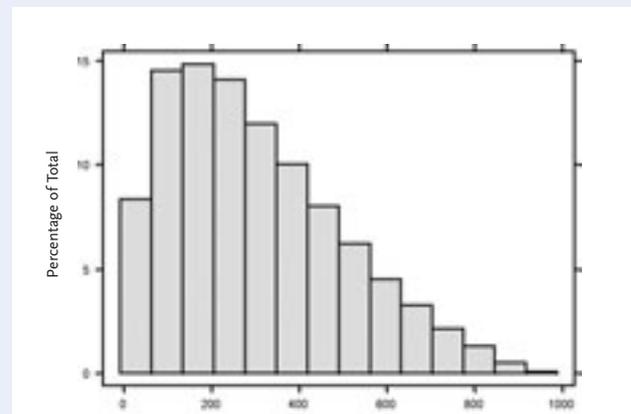
Wir betrachten nun ein Portfolio von m Schuldern und bezeichnen mit τ_i den Ausfallzeitpunkt des i -ten Schuldners. Weiter sei $F_i(t) = P(\tau_i \leq t)$ die (marginale) Verteilungsfunktion des Ausfallzeitpunkts des i -ten Schuldners und $f_i(t)$ die zugehörige Dichtefunktion (deren Existenz wir annehmen). Wir können nun eine Copulafunktion C nutzen, um die multivariate Ausfallzeit-

3.



Merton-Typ Modell mit Abhängigkeit über Gauß'sche Copula, unten Merton-Typ Modell mit Student-t Copula.

4.



Oben Intensitätsmodell mit Abhängigkeit über Gauß'sche Copula, unten Intensitätsmodell mit Student-t Copula.

punktverteilung zu bestimmen. Es ist nämlich $F(t_1, \dots, t_m) = C(F_1(t_1), \dots, F_m(t_m))$. Eine solche Modellierung ist hervorragend zu Simulationszwecken der Ausfallzeiten geeignet. Weiter ist es möglich, die Copulafunktion so zu wählen, dass wünschenswerte Eigenschaften der Abhängigkeitsstruktur der Ausfallzeitpunkte festgelegt werden. Damit ist dieser Ansatz zur Durchführung von Stress-Tests und Szenario Analysen hervorragend geeignet. Im allgemeinsten Fall können wir (gewisse Regularitätsbedingungen vorausgesetzt) die Intensität einer allgemeinen Stoppzeit (Zeitpunkt des Ausfalls) als $\gamma_i(t) = f_i(t)/(1 - F_i(t))$ definieren. Dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$1 - F_i(t) = \exp \left[- \int_0^t \gamma_i(u) du \right].$$

Wir können nun Abhängigkeitsstrukturen für die Ausfälle über Abhängigkeitsstrukturen der Intensitäten, der Überlebenswahrscheinlichkeiten, usw. modellieren. (siehe z.B. Li (2001) und Schönbucher (2003)).

5 Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag hat die prinzipiellen Ansätze zur Modellierung von Abhängigkeiten bei der Analyse von Portfolios von kreditsensitiven Wertpapieren und Krediten kurz diskutiert. Dabei wurden die grundlegenden Modellierungsansätze, der strukturelle und der Intensitäts-basierende Ansatz, in der gebotenen Knappheit dargestellt. Im Mittelpunkt der Analyse stand die Frage nach der Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen in beiden Ansätzen. Bei der Diskussion dieser Fragestellung wurde der Schwerpunkt auf grundlegende mathematische Konzepte gelegt, die in der gegenwärtigen Modellierung bei akademischen Untersuchungen, aber auch bei von Praktikern genutzten Modellen im Vordergrund stehen. Es stellt sich heraus, dass die Modellierung von Korrelationen zur vollständigen Beschreibung der benötigten Abhängigkeitsstrukturen nicht ausreichend ist. Als Hilfsmittel zur Analyse von Abhängigkeitsstrukturen werden vielmehr die sogenannten Copulafunktionen vorgeschlagen, die eine flexible Modellierung von Abhängigkeiten erlauben und es ermöglichen, viele empirisch beobachteten Eigenschaften von Credit Spreads nachzubilden. Weitere Informationen und eine detaillierte Diskussion der beschriebenen Ansätze finden sich in den Monographien Bingham/Kiesel 2004, Bluhm, C. and Overbeck, L. and Wagner, C. 2003, Lando 2004 und Schönbucher 2003.

Autoren:

Prof. Dr. Rüdiger Kiesel

Prof. Dr. Kiesel ist Leiter der Abteilung Finanzmathematik der Universität Ulm.

Dr. Michael Lesko

Leiter Research Gesamtbanksteuerung bei GILLARDON. Studium der Wirtschaftsmathematik und Promotion an der Universität Ulm. Begleitend zur Promotion Mitarbeiter am Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (IFA), Ulm. Seit 1998 bei GILLARDON tätig mit dem Schwerpunkt Kreditrisikomodellierung und -systeme. Diverse Veröffentlichungen sowie Seminar- und Referententätigkeiten zu dieser Thematik.

Clemens Prestele

Dipl.-Math. oec. Clemens Prestele ist Mitarbeiter der Abteilung Finanzmathematik der Universität Ulm.

Literatur:

Black, F./Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, in: Journal of Political Economy, 81, 81-89, 1973.

Bingham, N. H., and Kiesel, R.: Semi-parametric modelling in finance: theoretical foundation, Quantitative Finance, 2, pp. 241–250, 2002.

Bingham, N. H., and Kiesel, R.: Risk-Neutral Valuation, Springer Verlag, 2004.

Bingham, N. H., Kiesel, R. and Schmidt, R.: A semi-parametric approach to risk management, Quantitative Finance, 3, pp. 426—441, 2003.

Bluhm, C. and Overbeck, L. and Wagner, C.: An Introduction to Credit Risk Modelling, Chapman & Hall, 2003.

Lando, D.: Credit Risk Modeling: Theory and Applications, Princeton University Press, Juli 2004.

Li, D.X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, 9, pp43-54, 2000.

Merton, R.: On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, in: Journal of Finance, 29:449-470, 1974.

Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.

Rogge, E. und Schönbucher, P.: Modelling dynamic portfolio credit risk, Working Paper, 2002

Schönbucher, P: Credit Derivatives Pricing Models, Wiley, 2003.

GILLARDON – innovative Lösungen für die Finanzwirtschaft

Die Lösungen

Unsere Kernkompetenzen umfassen die Bereiche Kundenberatung, Produktkalkulation und Banksteuerung.

Kundenberatung

evenit™ ist das themenorientierte Beratungssystem für alle Vertriebskanäle für die Themen Altersvorsorge, Baufinanzierung, Vermögensanalyse und Financial Planning.

Produktkalkulation

MARZIPAN™ ist die Lösung zur Produktberatung und -kalkulation von Aktiv- und Passivgeschäften auf Basis der Marktzins- und Barwertmethode.

FinanceFactory™ ist das regelbasierte Kalkulationssystem für die Absatzfinanzierung, das alle Darlehensvarianten der Absatzfinanzierung inklusive Restkreditversicherung und Subventionsrechnung abdeckt.

Banksteuerung

THINC™ ist die integrierte Softwarelösung zur wertorientierten Banksteuerung und deckt die Themen Markt- und Vertriebssteuerung, Bilanzstrukturmanagement, Risikocontrolling, Treasury, Adressrisikosteuerung, Basel II und IAS / IFRS ab. THINC unterstützt Sie bei der Erfüllung der Anforderungen aus den MaRisk.



GILLARDON ist Branchenspezialist für Softwarelösungen, Consulting und Seminare in den Themenbereichen Kundenberatung, Produktkalkulation und Banksteuerung.