

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 175

**Quantifizierung operationeller Risiken von Versicherungsunternehmen
unter Verwendung des Loss Distribution Approach:
Extremwerttheorie vs. G&H-Verteilung**

**von
Christian Hess**

Mannheim 03/2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Der Loss-Distribution Approach (LDA).....	2
2.1	Vorbemerkung.....	2
2.2	Die Verlusthäufigkeit	4
2.3	Die Verlusthöhen.....	5
2.4	Der Gesamtverlustprozess	8
2.4.1	Darstellung	8
2.4.2	Auswertung des Gesamtverlustverteilung	9
2.4.3	Berücksichtigung von Versicherungskontrakte	10
2.4.4	Quantilbestimmung und Value-at-Risk	13
3	Modellierung auf Basis der Extremwerttheorie.....	14
3.1	Konvergenz der Maxima und der Exzedenten	14
3.2	Bestimmung der Quantile	18
3.3	Parameterschätzung	19
3.4	Schwellenwertfestlegung	20
3.4.1	Bias-Varianz-Bootstraping Methode.....	21
3.4.2	Mean-Excess-Plot.....	24
4	Modellierung auf Basis der GH-Verteilung	26
4.1	Explorative Datenanalyse als Ausgangsbasis	26
4.2	Darstellung der Verteilungsklasse.....	28
4.3	Bestimmung der Quantile	29
4.3	Parameterschätzung.....	30
4.4	Einordnung der Verteilungsklasse in die Extremwerttheorie	35
5	Anwendung des LDA auf operationelle Verluste von Versicherungen.....	36
5.1	Modellierung der Verlusthäufigkeit	36
5.2	Modellierung der Verlusthöhen	36
5.2.1	Peaks-over-Threshold-Methode	36
5.2.2	GH-Verteilung.....	42
5.3	Simulationsdurchführung.....	46
5.3.1	Besonderheit bei Verwendung des POT-Modells	46
5.2.2	Simulationsergebnisse	46
6	Schlussbetrachtung	49

1. Einleitung

Die Ergebnisse der IV. quantitative impact study (QIS) des Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) wurden im November 2008 veröffentlicht. CEIOPS besitzt den Auftrag der Europäischen Kommission zur Beratung im Hinblick auf Solvency II. Die III. QIS, bei der über 1000 Unternehmen teilgenommen haben, hat schon einige Erkenntnisse gebracht, auch im Hinblick auf die neue Kategorie der operationellen Risiken. Für diese Risikokategorie ist eine separate Kapitalunterlegung vorgesehen, die zusätzlich zu der Unterlegung für versicherungstechnische Risiken und Marktrisiken vorzuhalten ist.¹ Der vorgegebene Standardansatz wurde von den teilnehmenden Unternehmen als zu einfach angesehen. Vor allem wurde kritisiert, dass keine Ausgleichseffekte zu den anderen Risikokategorien vorgesehen sind.² Des Weiteren gibt es durch die ausschließliche Berücksichtigung der Rückstellungen und Prämien als Risikoträger keinen Bonus für effizientes Risikomanagement.

Interessanterweise verwenden bzw. planen nur 38% der befragten Unternehmen die Verwendung quantitativer Methoden. Zudem seien diese Methoden nur in etwa ein Drittel der Fälle mit den sophistizierten Basel II-Methoden zu vergleichen. Dabei überrascht auch nicht, dass vor allem kleine Firmen einfache Ansätze und die großen Unternehmen eher bankähnliche Modelle verwenden möchten. Etwa 100 Unternehmen haben zudem einen Vergleich des Standardansatzes zum jeweiligen internen Modell gezogen. Hier zeichnete sich ein gemischtes Bild ab. Während einige Lebensversicherer durch ihr internes Modell Kapitalerleichterungseffekte verzeichneten, würde eine Kapitalunterlegung auf Basis eines internen Modells für viele Schadenversicherer höher ausfallen.³

Zur Quantifizierung operationeller Risiken auf Basis interner Modelle wird vor allem der Loss Distribution Approach (LDA) an Bedeutung gewinnen. Der ursprünglich aus der Versicherungswirtschaft stammende Ansatz zur Quantifizierung von Risiken im Schadenversicherungsbereich wird von vielen Banken im Rahmen von Basel II für operationelle Risiken angewendet. Die Tatsache, dass noch nicht viele Versicherer diesen Ansatz verwenden, dürfte

¹ Vgl. Europäische Kommission 2007, S. 124 ff.; dabei wird die Solvency Capital Requirement für operationelle Risiken SCR_{op} auf die Basic Solvency Capital Requirement BSCR hinzuaddiert.

² Vgl. CEIOPS 2007, S. 120, durch die Addition der SCR wird ein komonotones Verhältnis angenommen; im Ansatz des GDV 2005, S. 49 ff. hingegen ist eine Korrelation von $\rho < 1$ vorgesehen.

³ Vgl. CEIOPS 2007, S. 131 ff.

folglich nicht am Know-how, sondern vielmehr an der spärlichen Datenlage liegen. Wenigstens haben die Versicherer reagiert, und bauen zurzeit Datenbanken auf.⁴ Hilfreich könnten hierbei externe Datenbanken, wie die SAS OpRisk Global Data, sein.⁵ Durch eine adäquate Verknüpfung mit den internen Daten kann eine ausreichende Datenbasis erreicht werden.

In dieser Arbeit werden in Kapitel 2 die Grundlagen des LDA gelegt. Zudem wird aufgezeigt, wie Versicherungslösungen zu einer Reduktion der Kapitalunterlegungsanforderung führen können. In Kapitel 3 und 4 wird an die Analysen von *Dutta / Perry* 2006 angeknüpft, indem für die Verlusthöhenverteilung zum einen auf die Extremwerttheorie (EVT) zurückgegriffen wird, um den Randbereich der Verteilung ab einer bestimmten Verlusthöhe zu modellieren.⁶ Zum anderen wird die flexible GH-Verteilungsfamilie eingesetzt, die die gesamte Verlusthöhenverteilung abdecken kann.

Im empirischen Anwendungskapitel 5 werden auf Basis des SAS OpRisk Global Data-Datensatzes für Versicherungsunternehmen die Verlusthäufigkeits- und die Verlusthöhenverteilungen modelliert. Im Rahmen einer Monte Carlo-Simulation werden die Gesamtverlustverteilung und ihre Quantile bestimmt. Zum einen wird das 99,5%-Quantil betrachtet, da im technischen Dokument zur IV. QIS diese Quantilhöhe für interne Modelle vorgesehen ist.⁷ Ferner ist auch das 99,9%-Quantil von besonderem Interesse, da diese Quantilhöhe in Basel II als Vorgabewert für Ambitionierte Messansätze (AMA) dient. Daher sollen beide Quantilhöhen der Verlustverteilung auf Basis des Versicherungsdatensatzes als Vergleichsmaßstab angesetzt werden.

2. Der Loss Distribution Approach (LDA)

2.1 Vorbemerkung

Im Rahmen von Basel II stellt der Loss Distribution Approach einen Ansatz innerhalb der fortgeschrittenen Messansätze (AMA – Advanced Measurement Approach) dar, um die operationellen Verluste zu quantifizieren. Das Basel Committee on Banking Supervision (2001) schreibt bei der Umsetzung des LDA folgende Vorgehensweise vor: „the bank estimates,

⁴ In der Schweiz sind die Versicherer sogar dazu verpflichtet, vgl. GDV 2007, S. 18 f.

⁵ Zur Marktführerschaft von SAS Softwarelösungen und Datenbanken im Bereich Operational Risk vgl. die Studie von Chartis Research Ltd. 2008, S. 5 ff.

⁶ Zur Umsetzung von statistischen Anpassungen im Bereich der Extremwerttheorie wurde EVIM von Gencay/Selcuk/Ulugülyagci 2002 verwendet und kann unter <http://www.bilkent.edu.tr/~faruk> heruntergeladen werden.

⁷ Vgl. Europäische Kommission 2007, S. 215 ff.; Kunzelmann/ Quick 2008, S. 21.

[...], the probability distribution functions of the single event impact and the event frequency for the next (one) year [...] and computes the probability distribution function for the cumulative operational loss". Im Rahmen der Quantitative Impact Studies von CEIOPS und den länderspezifischen Diskussionsansätzen wird der LDA nicht näher spezifiziert. Daher wird im Folgenden für die Modellierung von operationellen Verlusten von Versicherern auf den Basel II-Ansatz häufiger rekuriert. Jedoch wird im Gegensatz zu Basel II in dieser Studie ein univariates Modell für ein Gesamtunternehmen erstellt, so dass keine einzelnen Risikozellen definiert werden.

Der LDA basiert auf aktuariellen Methoden der kollektiven Risikotheorie, die schon seit langer Zeit in der aktuariellen Praxis Anwendung finden. Bei der kollektiven Risikotheorie besteht das Ziel darin, den kollektiven Gesamtschaden $S(t)$ für das Zeitintervall $[0, t]$ zu modellieren. Hierzu sei unterstellt, dass $S(t)$ einem stochastischen Prozess folgt, der in die Komponenten Schadenzahl (claim frequency) $N(t)$ und Schadenhöhe pro Schadenfall (loss severity) X_i disaggregiert werden kann, formal

$$(2.1) \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i .$$

Diese Methode wird auf den LDA übertragen, indem nunmehr die Gesamtverlustverteilung $L(t)$ der operationellen Verluste von Interesse ist. Daher wird im Folgenden mit $N(t)$ die Verlusthäufigkeit und mit X_i die Verlusthöhe pro eingetretenem operationellen Verlustfall bezeichnet. Somit ergibt sich $L(t)$ über

$$(2.2) \quad L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i ,$$

und ist ebenso wie (2.1) ein zusammengesetzter Summenprozess, der durch die stochastische Anzahl $N(t)$ von operationellen Verlusten im betrachteten Zeitintervall bestimmt wird.⁸

⁸ Vgl. Mikosch 2004, S. 8; im versicherungstechnischen Kontext ergibt sich ein Verlust, wenn die Schäden die Prämien übersteigen. Bei operationellen Verlusten gibt es naturgemäß keine Prämien, die die Schäden abdecken könnten, so dass Schäden und Verluste gleichzusetzen sind, vgl. Albrecht 1998.

Für einen fixierten Zeitraum, z.B. $t = 1$ für ein Jahr, kann der Zeitindex t fallen gelassen werden. Die Verlusthäufigkeit $N(t)$ kann als Zählprozess charakterisiert werden, der die Verlusteintrittszeitpunkte T_i im Intervall $[0, t]$ zählt, formal

$$(2.3) \quad N(t) = \max\{i \in \mathbb{N}; T_i \leq t\}.$$

Die Eintrittszeitpunkte wiederum können über einen Punktprozess, d. h. eine Folge T_1, T_2, \dots von Zufallsvariablen modelliert werden.

2.1 Die Verlusthäufigkeit

Das Standardmodell für die Verlusthäufigkeit bildet der homogene Poissonprozess, der axiomatisch fundiert ist. Hierbei sind vor allem die Zuwächse $N(t+h) - N(t)$ von zentraler Bedeutung. Ein Zählprozess heißt homogener Poissonprozess, wenn

$$(2.4a) \quad N(0) = 0$$

gilt, und der Prozess somit bei Null startet. Zusätzlich ist folgende Anforderung zu stellen:

$$(2.4b) \quad N(t) \text{ besitzt unabhängige und stationäre Zuwächse.}$$

Die Bedingung (2.4b) fordert, dass für die Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2 < t_3$ die Zuwächse $N(t_3) - N(t_2)$ und $N(t_2) - N(t_1)$ unabhängig sind. Mit Hinblick auf die geforderte Stationarität weißt die Zufallsvariable $N(t_2) - N(t_1)$ die gleiche Verteilung wie $N(t_2 - t_1)$ auf.⁹

Zudem tritt in jedem Zeitintervall $[0, t]$ mit positiver Wahrscheinlichkeit ein Ereignis ein, aber es muss keines eintreten:

$$(2.4c) \quad \text{Für alle } t > 0 \text{ gilt } 0 < P[N(t) > 0] < 1.$$

Zudem ist der HPP ein regulärer Prozess, so dass er kein Clustering vorsieht:

$$(2.4d) \quad \lim_{t \rightarrow 0} P(N(t) \geq 2) = 0.^{10}$$

Aus den vorherigen Axiomen folgt, dass $N(t)$ für $t > 0$ poissonverteilt mit Parameter λt ist, wobei λ der Intensität des Prozesses entspricht. Die Zählverteilung $P_n(t)$ lässt sich somit wie folgt charakterisieren:

⁹ Vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 486.

¹⁰ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 8; McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 486 f.

$$(2.5) \quad P_n(t) = P[N(t) = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.^{11}$$

Für den HPP ist der Intensitätsparameter λ zeitunabhängig und es gilt

$$(2.6) \quad \lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) > 0]}{h}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall h ein Verlustereignis auftritt, ist somit approximativ gleich λh .

Um den Parameter λ zu schätzen, bietet sich die Beziehung

$$(2.7) \quad \lambda = E[N(1)]$$

an, wobei λ der mittleren Schadenzahl einer Periode der Länge 1 entspricht.

2.2 Die Verlusthöhen

Zur Modellierung der Verlusthöhe X kommt jede Verteilung in Betracht, deren Definitionsbereich in $[0, \infty)$ liegt, da operationelle Verluste nicht-negativ sind. In der Literatur wird eine Fülle von Verteilungsfunktionen für operationelle Verlusthöhen diskutiert.¹² Vor allem gefährliche Verteilungen (heavy-tailed distributions) sind im Versicherungsbereich, aber auch im Bereich operationeller Risiken, sehr häufig anzutreffen. Diese Verteilungsgruppe besitzt am rechten Rand besonders viel Wahrscheinlichkeitsmasse, was auf den schiefen leptokurtischen Charakter zurückzuführen ist. Die subexponentiellen Verteilungen sind als Untergruppe gefährlicher Verteilungen zur Modellierung operationeller Risiken besonders gut geeignet. Zu dieser Gruppe gehören beispielsweise die Log-Normalverteilung, die Weibullverteilung (für Parameter $0 < \tau < 1$), sowie die als besonders gefährlich einzustufenden Pareto-, Burr- und Log-Gammaverteilung. Eine Zufallsvariable X und deren Verteilung werden als subexponentiell eingestuft, wenn für eine Folge X_i von unabhängigen identisch verteilter Zufallsvariablen (iid - independent identically distributed) die Verteilungsenden der Summe $L_n = X_1 + \dots + X_n$ und des Maximums $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ folgende Relation aufweisen:

$$(2.8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(L_n > x)}{P(M_n > x)} = \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} = 1, \quad \text{für } n \geq 2.$$

¹¹ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 8.

¹² Vgl. De Fontnouvelle/ Rosengren/ Jordan 2004; Moscadelli 2004.

Somit wird das Verteilungsende der Summe hauptsächlich durch das des Maximums bestimmt. Hohe Werte für L_n werden meist durch einen hohen Verlust verursacht. Eine Basis-eigenschaft subexponentieller Verteilungen kann durch die Analyse des Verteilungsendes $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ gewonnen werden. So nimmt $\bar{F}(x)$ langsamer als jedes exponentielle Verteilungsende ab, was durch folgende Beziehung dargestellt werden kann:

$$(2.9) \quad \frac{\bar{F}(x)}{\exp(-\varepsilon x)} \rightarrow \infty, \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ und } \forall \varepsilon \geq 0.$$

Eine besonders gefährliche Unterklasse der subexponentiellen Verteilungen sind Zufallsvariablen mit regulär variierendem Verteilungsenden (regular varying tails). Die reguläre Variation ist eine Möglichkeit mit kleinen Abweichungen das exakte Power Law-Verhalten zu beschreiben.¹³ Zu dieser Klasse gehört die Pareto-, die Burr-, die Log-Gamma-, und die α -stabile Verteilung. Das rechte Ende $\bar{F}(x)$ dieser Verteilungen kann durch

$$(2.10) \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{L_{\text{var}}(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0$$

dargestellt werden, wobei α dem Tail-Index entspricht und $L_{\text{var}}(x)$ eine langsam-variierenden Funktion mit der Eigenschaft

$$(2.11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_{\text{var}}(cx)}{L_{\text{var}}(x)} = 1, \quad \forall c > 0$$

bezeichnet. Bei gegebenem Tail-Index α kann unmittelbar bestimmt werden, ob die Momente der Verteilung endlich sind:

$$(2.12) \quad E(X^\delta) = \begin{cases} = \infty & \text{für } \delta > \alpha \\ < \infty & \text{für } \delta < \alpha \end{cases}.$$

Somit weist eine Verteilung mit Tail-Index $\alpha < 2$ eine unendliche Varianz auf.

Die meisten Verteilungen zeigen Schwächen, um die operationellen Verlusthöhen im gesamten Spektrum angemessen abzubilden. So erscheint es sehr schwer, eine zufrieden stellende Anpassung sowohl im Kleinverlustbereich (Low-Severity-Bereich) als auch im Großverlustbereich (High-Severity-Bereich) zu erzielen.¹⁴

¹³ Vgl. Mikosch 2004, S. 105 f.

¹⁴ Vgl. De Fontnouvelle/ Rosengren/ Jordan 2004, S. 16.

Eine Lösung dieser Problematik kann mit Hilfe des aus der Extremwerttheorie stammenden Balkema-de Haan-Pickands-Theorems erzielt werden. Ab einer zu definierenden hohen Schwelle wird das Verteilungsende mit Hilfe der Verallgemeinerten Paretoverteilung (GPD) approximiert. Gerade mit Hinblick auf die Modellierung operationeller Risiken gibt es kontroverse Meinungen zu dem Einsatz der EVT.¹⁵ Im Kontext der Modellierung von Finanzzeitreihen bzw. von Versicherungsdaten kamen frühe Studien zu dem Schluss, dass die POT-Methode die beste parametrische Methode sei, um eine Anpassung an das Verteilungsende einer unbekanntem Verteilung vorzunehmen.¹⁶ Die Arbeit von *Diebold/ Schuermann/ Stroughair* (2000) sah dies schon etwas differenzierter, da die POT-Methode einige Fallstricke bereithält, so wie die Annahme von iid-Daten.¹⁷ Als größte Schwierigkeit und damit die Achilles-Ferse dieser Methode erweist sich die Festlegung einer geeigneten Schwelle. Bei Ansatz einer zu niedrigen Schwelle ist der Bias der Parameterschätzung sehr hoch, dafür liegen genügend Datenpunkte bzw. Exzesse vor, um eine niedrige Varianz zu erhalten. Für hohe Schwellen verhält sich dies reziprok. Diese Problematik wirkt sich unmittelbar auf die Schätzung hoher Quantile aus, was zu Über- bzw. Unterschätzungen des benötigten Risikokapitals führen kann.¹⁸ Die Schwellenfestlegung führt auch zu einem Anwendungsproblem bei Durchführung des LDA. Da nur Verluste jenseits der Schwelle approximiert werden können, muss die Verlusthöhenverteilung als Kombination einer Verteilung für kleine/mittlere Verluste und der GPD-Verteilung für große konstruiert werden. Diese Vorgehensweise wird auch als Splicing bezeichnet.¹⁹

Die empirische Studie von *Dutta/ Perry* 2006 greift diese Problemfelder auf, indem die Autoren zwei 4-parametrische Verteilungen, die verallgemeinerte Beta-Verteilung 2. Art und die GH-Verteilung, verwenden. Diese Verteilungen decken den ganzen Wertebereich ab und machen ein Splicing überflüssig. Zusätzlich bieten die Verteilungen aufgrund der hohen Parameteranzahl eine gute Anpassungsgüte sowohl im Low- als auch im High-Severity-Bereich.²⁰ Auch in dieser Studie auf Basis des SAS-Datensatzes soll eine Gegenüberstellung einer Simulation auf Basis der EVT einerseits und der GH-Verteilung andererseits erfolgen. In Kapitel 3

¹⁵ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 27 ff.; Dutta/ Perry 2006; Degen/ Embrechts/ Lambrigger 2006.

¹⁶ Vgl. McNeil/ Saladin 1997, S. 19.

¹⁷ Vgl. Diebold/ Schuermann/ Stroughair 2000, S. 51 ff.; ähnlich Neshlehova/ Embrechts/ Chavez-Demoulin 2006, S. 7.

¹⁸ Vgl. Neshlehova/ Embrechts/ Chavez-Demoulin 2006, S. 6.

¹⁹ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 29; Nguyen/ Ottmann 2005, S. 45.

²⁰ Vgl. Dutta/ Perry 2006, S. 15 ff.

und 4 werden beide Methoden theoretisch fundiert und die Vorgehensweise zur statistischen Inferenz dargestellt. In Kapitel 4.5 wird in Analogie zu *Degen/ Embrechts/ Lambrigger* (2006) die GH-Verteilung auf deren extremwerttheoretischen Eigenschaften untersucht.

2.4 Der Gesamtverlustprozess

2.4.1 Darstellung

Nach erfolgter Spezifikation der Verlusthäufigkeit und der Verlusthöhe kann der Gesamtverlustprozess näher betrachtet werden. Dabei werden für das grundlegende Modell die folgenden Standardannahmen getroffen:

- (1) Die Verlusthöhen sind unabhängig und identisch verteilt: $X_i \sim \text{iid}$ mit Verteilungsfunktion $F(x)$
- (2) Der Prozess der Verlusthäufigkeit $N(t)$ die Verlusthöhen $(X_1, \dots, X_{N(t)})$ sind unabhängig.²¹

Bei Gültigkeit der getroffenen Annahmen lässt sich die zusammengesetzte Verteilung des Gesamtverlustprozesses $G_t(x)$ über

$$(2.13) \quad G_t(x) = P[L(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = n] P[L_t \leq x | N(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) F^{n*}(x), \quad x \geq 0 \quad t \geq 0$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) F^{n*}(x), & x > 0 \\ P(N_t = 0), & x = 0 \end{cases}$$

bestimmen, wobei $F^{n*}(x)$ die n-te Faltung der Verteilungsfunktion F bezeichnet.²² Ist $N(t)$ ein HPP, dann wird $L(t)$ als zusammengesetzter Poissonprozess (compound Poisson Process) bezeichnet, und für $G_t(x)$ gilt

$$(2.14) \quad G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x).^{23}$$

Die Form der Verteilung $G_t(x)$ ist recht kompliziert und analytisch nur bei restriktiven Annahmen zu berechnen. Dies gilt auch dann, wenn $P_n(t)$ für alle n und die Verteilung F von X_i bekannt sind, da die Faltungen F^{n*} der Verteilung F in geschlossener Form im allge-

²¹ Vgl. Auer 2008, S. 188 f.; Frachot/ Roncalli/ Salomon 2004, S. 2; Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 14 f.

²² Vgl. Rachev/ Chernobai/ Menn 2006, S. 5; Frachot/ Georges/ Roncalli 2001, S. 4.; Nyström/ Skoglund 2002, S. 5 f.

²³ Vgl. Bühlmann 1970, S. 58.

meinem nicht verfügbar sind.²⁴ Zumindest sind die Momente der zusammengesetzten Verteilung unter der Unabhängigkeitsannahme bestimmbar. So ergibt sich der Erwartungswert und die Varianz von $L(t)$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} E[L(t)] &= E[N(t)]E(X) \quad \text{bzw.} \\ \text{Var}[L(t)] &= E[N(t)]\text{Var}(X) + E(X)^2\text{Var}[N(t)] \end{aligned} \quad .^{25}$$

2.4.2 Auswertung der Gesamtverlustverteilung

Da für die meisten Modelle eine Auswertung von (2.13) analytisch nicht möglich ist, kann auf eine Reihe von Approximationsverfahren zurückgegriffen werden. Vor allem die Monte-Carlo (MC)-Simulation bietet dabei flexible Modellanpassungen. So lassen sich durch eine MC-Simulation auch Versicherungskonzepte in den Loss Distribution Approach integrieren.²⁶ Hinsichtlich der Durchführung der MC-Simulation beim LDA unter der Annahme einer poissonverteilten Verlusthäufigkeit wird folgender Algorithmus angewendet:

1. Ziehe eine Realisation \tilde{N}_j aus einer Poissonverteilung $Poi(\lambda t)$.
2. Ziehe \tilde{N}_j unabhängige Verlusthöhenrealisationen $(X_1, \dots, X_{\tilde{N}_j})$.
3. Summiere alle Verlusthöhen, so dass sich die Verlustrealisation $\tilde{L}_j(t) = X_1 + \dots + X_{\tilde{N}_j}$ bestimmen lässt.
4. Wiederhole Schritt (1) bis (3) eine große Anzahl J mal. Die empirische Verteilung von $\tilde{L}(t)$ approximiert die Gesamtverlustverteilung $G_t(x)$.²⁷

Zur Sensitivitätsanalyse bietet es sich an die Verlustverteilung direkt zu approximieren, ohne dass auf eine MC-Simulation zurückgegriffen wird.²⁸ Dies hat auch den Vorteil eine Benchmark zu erhalten, so dass eine Plausibilitätskontrolle der erhaltenen MC-Ergebnisse möglich ist.²⁹ In der Versicherungspraxis gibt es mit der Normal-Power (NP)-Approximation ein sehr populäres Verfahren, um das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $L(t)$ zu approximieren. Jedoch ist das Verfahren nur insoweit zufrieden stellend, als dass die Schiefe von $L(t)$ moderat bleibt. So eignet sich für schiefe Verlustverteilungen eher die Gamma-Approximation. Aber selbst bei Anwen-

²⁴ Vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 473; Mikosch, S. 126.

²⁵ Vgl. den Beweis von McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 474.

²⁶ Vgl. Aue/ Kalkbrenner 2007, S. 36 und Kapitel 5.3.2.; für andere numerische Verfahren wie die Fast Fourier-Transformation oder die Panjer-Rekursion vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005.

²⁷ Zur MC-Simulation vgl. Auer 2008, S. 188 f.

²⁸ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 17 f.

²⁹ Vgl. Aue/ Kalkbrenner 2007, S. 45 ff.

dung dieses Verfahrens kann es zu Ungenauigkeiten bei Schätzungen von Quantilen im Randbereich kommen.³⁰ Rekursionsverfahren, wie die Panjer-Rekursion, haben im aktuariellen Bereich auch häufig Verwendung gefunden. Hier ist jedoch eine Diskretisierung der Verlusthöhenverteilung nötig und die Verteilung von $N(t)$ muss zur Panjer-Klasse gehören.³¹

Eine Alternative zu den obigen Verfahren bietet sich auf Grundlage des “one-claim-causes-ruin“-Paradigmas an, welches der Tatsache Rechnung trägt, dass der Großteil der operationellen Verluste durch einige wenige Verluste verursacht wird. Wenn subexponentielle Verlusthöhen zugrunde gelegt werden, lässt sich zeigen, dass das Tailverhalten der Gesamtverlustverteilung $G_t(x)$ sich durch das Verteilungsende $\bar{F}(x)$ der Verlusthöhenverteilung $F(x)$ bestimmt. Dafür wird der grundlegende Zusammenhang ausgenutzt, dass bei steigenden Verlusthöhen $G_t(x)$ ebenfalls subexponentiell ist. Gilt für ein $\varepsilon > 0$ der Zusammenhang

$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n P_t(n) < \infty$, dann kann das Verteilungsende von $G_t(x)$ über

$$(2.16) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} = \lambda t = E[N(t)] \quad \text{bzw.} \quad \bar{G}_t(x) \sim E[N(t)] \bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty$$

approximiert werden.³²

2.4.3 Berücksichtigung von Versicherungsverträgen

Im Bankensektor ist in Basel II eine Berücksichtigung von Versicherungsverträgen im LDA vorgesehen. Die Berücksichtigung von Versicherungen ist jedoch an vielen Voraussetzungen gebunden.³³ Auch Versicherungsunternehmen können durch einen Versicherungsvertrag einen Risikotransfer erzielen und so ihre Kapitalanforderung eventuell reduzieren.

Die Berücksichtigung von Versicherungen erfolgt zunächst auf Einzelverlustebene, indem der Erstattungsbetrag R des i -ten Verlusts X_i wie folgt berechnet wird:

$$(2.17) \quad R_i(X_i) = \min(\max(X_i - d, 0), m), \quad \forall i = 1, \dots, \tilde{N}_j.$$

Dabei trägt der Versicherungsnehmer einen Selbstbetrag (deductible) d . Wenn höhere Verluste als d eintreten, erhält der Versicherungsnehmer den Selbstbetrag übersteigenden Ver-

³⁰ Vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 476 ff.

³¹ Vgl. Panjer 2006, S. 127.

³² Vgl. das Theorem 1.3.9 in Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 45; Böcker/ Klüppelberg 2006, S. 6.

³³ Vgl. Auer 2008, S. 213 ff; Basel 2004, S. 148, Par. 677 - 679; Chapelle et al. 2004, S. 8.

lust $X_i - d$ erstattet. Diese Erstattung wiederum wird von dem Maximalbetrag m begrenzt, so dass insgesamt ein Haftungslayer zwischen den Verlusthöhen d und $(d + m)$ entsteht. Der resultierende modifizierte Einzelverlust (Netto-Verlust) ergibt sich entsprechend durch

$$(2.18) \quad X_{i,\text{mod}} = X_i - R_i(X_i) = \begin{cases} X_i & \text{für } X_i \leq d \\ d & \text{für } d < X_i \leq (d + m) \\ X_i - m & \text{für } X_i > (d + m) \end{cases}^{34}$$

Durch Aufsummierung aller Netto-Verluste der Periode j ändert sich der Periodenverlust zu

$$(2.19) \quad L_{j,\text{mod}} = \sum_{i=1}^{N_j} X_i - \sum_{i=1}^{N_j} R_i(X_i) = \sum_{i=1}^{N_j} X_i - R_i(X_i) = \sum_{i=1}^{N_j} X_{i,\text{mod}} \quad^{35}$$

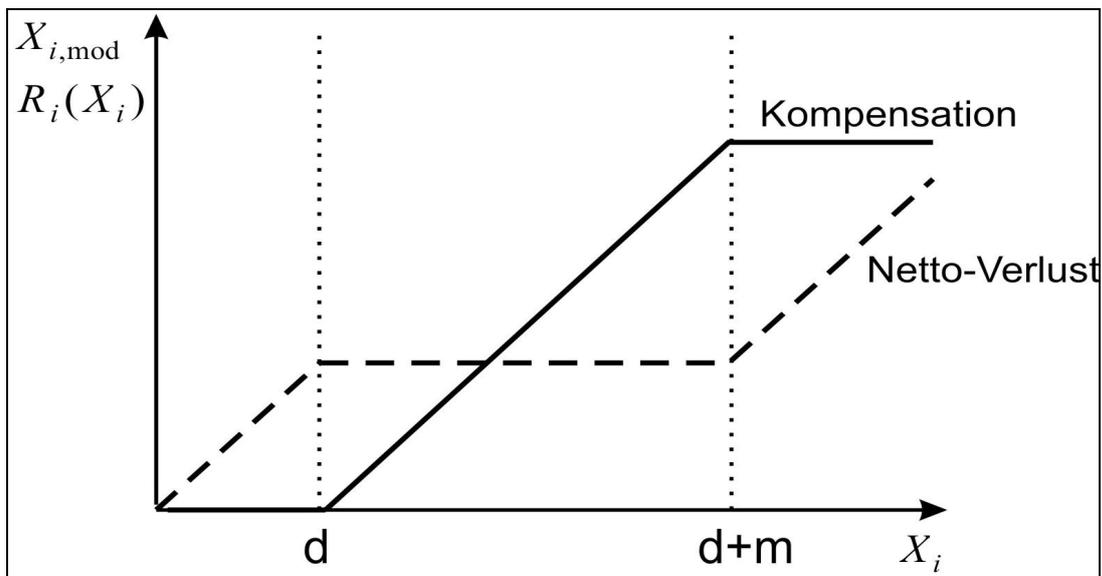


Abb. 2.1

Wenn zusätzlich ein Selbstbehalt D und ein maximaler Erstattungsbetrag M auf Jahresbasis vereinbart ist, wird der jährliche aggregierte Erstattungsbetrag R_{agg} gemäß

$$(2.20) \quad R_{agg} = \min \left(\max \left(\sum_{i=1}^{N_j} R_i(X_i) - D, 0 \right), M \right)$$

berechnet. Somit wird der modifizierte Verlust auf Jahresbasis nun nicht mehr nach (2.19) ermittelt, da die Versicherungsleistung sich nun erst am Jahresende bestimmt, und es folgt

³⁴ Vgl. Brandts 2004, S. 15.

³⁵ Vgl. Bazzarello et al. 2006, S. 58 f.

$$(2.21) \quad L_{j,\text{mod}} = \sum_{i=1}^{N_j} X_i - R_{\text{agg}}. \quad ^{36}$$

Zusätzlich lässt sich die Unsicherheit, ob nun das Unternehmen die volle Kompensationszahlung erhält, ins Modell integrieren. Diese Vorgehensweise ist sogar nach den Regeln von Basel II explizit vorgeschrieben.³⁷ So besteht ein Ausfallrisiko des Versicherers, welches Berücksichtigung finden muss. Generell muss das Rating des Versicherers mindestens „A“ betragen, damit die Versicherung die Kapitalunterlegung mindern kann. Eine einfache Modellierung des Ausfallrisikos kann dadurch erreicht werden, indem das Rating des Versicherers in eine einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit PD (Probability of Default) übertragen wird und eine binäre Zufallsvariable erzeugt wird:

$$(2.22) \quad I^P = \begin{cases} 0 & , \text{ mit } PD \\ 1 & , \text{ mit } 1 - PD \end{cases}. \quad ^{38}$$

Zusätzlich können Zahlungssicherheiten aufgrund von Unstimmigkeiten zwischen dem Unternehmen und dem Versicherer auftreten, ob die Police einen spezifischen Verlust überhaupt abdeckt, oder ob das Unternehmen sämtliche notwendigen Vorkehrungen zur Abwendung des Verlustes getroffen hat. Diese Unsicherheit kann wiederum mit einer binären Zufallsvariablen

$$(2.23) \quad I^{PR} = \begin{cases} 1 & \text{ mit } PR \\ 0 & \text{ mit } 1 - PR \end{cases}$$

modelliert werden. Die Wahrscheinlichkeit PR (Probability of Recovery), also die Wahrscheinlichkeit für eine Kompensation, kann aus empirischen Daten gewonnen werden, wobei Studien darauf hinweisen, dass eine Kompensation in ungefähr 80% der Fälle erfolgt. Zur vollständigen Modellierung wird I^{PR} noch mit der Recovery-Rate RR multipliziert, damit die Fälle berücksichtigt werden, bei denen die Versicherungsleistung nicht vollständig geleistet wird.³⁹ Somit bestimmt sich bei Berücksichtigung dieser Unsicherheiten die Kompensation über

$$(2.24) \quad R_{\text{agg}} = I^{PD} \cdot (I^{PR} RR) \cdot \min \left(\max \left(\sum_{i=1}^{N_j} R_i(X_i) - D, 0 \right), M \right) \cdot H.$$

³⁶ Vgl. Bazzarelli et al. 2006, S. 59.

³⁷ Vgl. Basel 2004, S. 148, Par. 678.

³⁸ Vgl. Aue/ Kalkbrenner 2007, S. 33.

³⁹ Vgl. Brandts 2004, S. 19 f.

Ein zusätzlicher Haircut H kann vorgenommen werden, wenn die Police eine Restlaufzeit T^R von weniger als 1 Jahr aufweist. Der Haircut könnte wie folgt implementiert werden:

$$(2.25) \quad H = \begin{cases} \min(T^R, 365)/365 & , \text{wenn } T^R > 90 \\ 0 & , \text{wenn } T^R \leq 90 \end{cases} \quad 40$$

2.4.4 Quantilbestimmung und Value-at-Risk

Zum Zweck der Kapitalunterlegung ist vor allem das Risikomaß Value-at-Risk (VaR) von Bedeutung. Der Value-at-Risk ergibt sich für das Konfidenzniveau α als kleinsten Verlust l , der maximal mit Wahrscheinlichkeit α übertroffen wird, formal

$$(2.26) \quad VaR_\alpha = \inf \{l \in R : P(L_t > l) \leq \alpha\} = \inf \{l \in R : G_t(l) \geq 1 - \alpha\}.$$

Folglich ist der VaR ein Quantilmaß $Q_{1-\alpha}[L_t]$, welches eine Partialinformation der Gesamtverlustverteilung G_t widerspiegelt.⁴¹

Nach Durchführung der MC-Simulation kann die resultierende empirische Verteilung von L näher analysiert und ihre Quantile bestimmt werden. Gemäß den Regelungen in Basel II ist für den LDA im Bereich ambitionierter Messansätze operationeller Risiken vor allem das 99,9%-Quantil der Verlustverteilung von Interesse. In den Konsultationspapieren zu Solvency II ist im Hinblick auf die Implementierung interner Modelle das 99,5%-Quantil zu beachten. Der VaR zu den genannten Quantilen wird durch die simulierte Verlustverteilung bestimmt. Dabei ist die MC-Simulation die einzige Approximation, die Risikoreduktionseffekte einer Versicherung aus Kapitel 2.4.3 adäquat berücksichtigen kann.

Das $(1-\alpha)$ -Quantil $Q_{1-\alpha}$ der Gesamtverlustverteilung $G_t(x)$ kann auch auf Basis des „one-claim-causes-ruin“-Paradigmas bestimmt werden, indem nun direkt der Zusammenhang aus (2.16) ausgenutzt wird. Da (2.16) in der Tail-Notation definiert ist, wird daher in einem ersten Schritt die Formel zu

$$(2.27) \quad G_t(x) = 1 - (E[N(t)][1 - F(x)])$$

⁴⁰ Vgl. Bazzarelo et al. 2006, S. 59, hierbei ist die Unterscheidungsgrenze bei 90 Tagen festgelegt, vgl. ferner Basel 2004, S. 148, Par. 678 u. 679.

⁴¹ Vgl. Frachot/ Georges/ Roncalli 2001, S. 6 ff; Koryciorz 2004, S. 22 ff.; zur Quantileigenschaft ferner Albrecht 2003, S. 27; Albrecht/ Maurer/ Möller 1998, S. 251.

transformiert. Zur Bestimmung des $(1 - \alpha)$ -Quantils $Q_{1-\alpha}$ von $G_t(x)$, wird über

$$(2.28) \quad G_t(Q_{1-\alpha}) = 1 - (E[N(t)][1 - F(Q_{1-\alpha})]) = 1 - \alpha,$$

die Umkehrfunktion von (2.28) bei dem Wert $(1 - \alpha)$ bestimmt, was zu dem Quantil

$$(2.29) \quad Q_{1-\alpha}[L(t)] \approx F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{E[N(t)]}\right) \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0,$$

führt. Ausschlaggebend für die Quantilschätzung und somit für die Kapitalunterlegungsanforderung ist nunmehr die Verteilung der Verlusthöhen. Dies kann dadurch gerechtfertigt werden, dass der Umfang einzelner extremer Verluste aus einem Verlustereignis eine gute Approximation für die Quantile der Gesamtverlustverteilung liefert.⁴² Aue/ Kalkbrenner (2007) verwenden interessanterweise zur Approximation keine parametrische Verteilung für die Verlusthöhenverteilung, sondern die empirische Verteilung. Dies wird dadurch begründet, dass somit eine Quantilschätzung unabhängig von der parametrischen Verlusthöhenverteilung möglich ist.⁴³ Insofern wird dieser Ansatz als Benchmark für die MC-Simulation des Loss-Distribution-Ansatzes verwendet.

3 Modellierung auf Basis der Extremwerttheorie

3.1 Konvergenz der Maxima und der Exzedenten

Mit Hilfe der Extremwerttheorie können Modelle für sehr große Verluste konstruiert werden. Die EVT wurde früher primär in der Klimatologie und Hydrologie eingesetzt. Erst in der jüngeren Vergangenheit wurde die EVT auch im Risikomanagement, vor allem im Hinblick auf die Analyse von Finanzzeitreihen, angewendet.⁴⁴ Auch in der Modellierung operationeller Verlusthöhen wurde die EVT häufiger schon angewendet, was durch die schwierige Anpassung gängiger Verteilungen an den gesamten Datensatz durchaus gerechtfertigt ist.⁴⁵

Für die Modellierung von operationellen Verlusthöhen ist das auf der EVT-basierende Peaks-over-Threshold (POT)-Modell von großer Bedeutung. Mit Hilfe des POT-Modells lässt sich, unter gewissen Voraussetzungen, ab einer Verlustschwelle u der Verteilungsrand (Tail) explizit modellieren. Hierzu bedient man sich des Pickands-Balkema-de Haan-Theorems, wel-

⁴² Vgl. Aue/ Kalkbrenner 2007, S. 47; Böcker/ Klüppelberg 2006, S. 8 ff.

⁴³ Vgl. Aue/ Kalkbrenner 2007, S. 47.

⁴⁴ Vgl. De Haan et al. 1994; McNeil/ Frey 2000.

⁴⁵ Vgl. Moscadelli 2004; de Fontnouvelle 2004; Dölker 2007; Dutta/ Perry 2006.

ches eine Konvergenzaussage für die Verteilung der Verlustbeträge, die eine definierte Schwelle u übersteigen, (Exzessverteilung) trifft.

Die Konvergenz der Exzessverteilung einer Folge von iid-Zufallsvariablen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ setzt jedoch ein bestimmtes Konvergenzverhalten des Maximums M_n dieser Folge voraus. Daher ist es zweckgemäß, dass man zuvor die Konvergenz des Maximums der Folge näher beleuchtet.

Das Maximum M_n einer iid Folge X_n ist durch die folgende Beziehung definiert:

$$(3.1) \quad M_1 = X_1, \quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 2.$$

Ferner ergibt sich die Verteilung des Maximums über

$$(3.2) \quad P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x),$$

wobei ein intuitiver Zusammenhang dieser Verteilung mit der rechten Verteilungsflanke der unterliegenden Zufallsvariablen herrscht. Bei Ausweitung der Folge bzw. für $n \rightarrow \infty$ konzentriert sich die Verteilung des Maximums im rechten Endpunkt x_F der Zufallsvariablen.⁴⁶

Um einen größeren Informationsgehalt zu generieren, wird in der Literatur eine lineare Transformation des Maximums vorgeschlagen, wobei zwei Konstanten d_n und c_n so gewählt werden, dass

$$(3.3) \quad M_n^* = c_n^{-1}(M_n - d_n)$$

gilt. Die Konvergenz der normalisierten Sequenz von Maxima M_n^* , formal

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P((M_n - d_n)/c_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x),$$

gegen eine nicht-entartete Verteilungsfunktion $H(x)$ ist dabei von besonderem Interesse.⁴⁷

Bei Vorliegen des Konvergenzverhaltens bedeutet dies für die Verteilungsfunktion F , dass diese sich im Max-Anziehungsbereich (Maximum Domain of Attraction) von H befindet, formal $F \in MDA(H)$.⁴⁸

⁴⁶ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 114 f.

⁴⁷ Nicht-entartet bezieht sich darauf, dass die Verteilung von H nicht in einem einzigen Punkt konzentriert ist; vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 266.

⁴⁸ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 128; McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 266.

Diesen Ansatz greift auch das Fisher-Tippett-Theorem auf. Der Grundgedanke dieses Theorems zielt darauf ab, dass die Verteilung von M_n^* bei Existenz geeigneter Normierungskonstanten c_n und d_n gegen eine Verteilung aus der Familie der Verallgemeinerten Extremwertverteilung $H_\xi(x)$ (GEV) konvergieren muss.⁴⁹

Die Familie der Verallgemeinerten Extremwertverteilung (GEV) besteht aus den 3 folgenden Verteilungen:

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x^{-\alpha})), & x \leq 0, \alpha < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

wobei sich für $\xi = 1/\alpha$ die GEV-Familie durch

$$(3.5) \quad H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}), & \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0 \end{cases},$$

beschrieben werden kann. Für Anwendungszwecke ist anzumerken, dass sich nahezu alle bekannten Verteilungen für ein spezifisches ξ im $MDA(H_\xi)$ befinden.⁵⁰

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, ist für die Quantifizierung operationeller Risiken die Modellierung der Verlusthöhenverteilung von besonderer Bedeutung. Um Extremereignisse mit hinreichend viel Kapital zu unterlegen, stellt eine gute Approximation des Verteilungsendes eine große Herausforderung dar. Hierzu kann man sich ebenfalls der Extremwerttheorie bedienen, wobei hier eine Konvergenzaussage für eine Exzessverteilungsfunktion F_u mit

$$(3.6) \quad F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$$

möglich ist. Dabei stellt die Differenz $X - u$ den Exzess Y dar, wobei die Verteilung der Exzesse auf das Ereignis das die Zufallsgröße X die Schwelle u übersteigt bedingt ist und F_u folglich eine bedingte Verteilung darstellt.

⁴⁹ Vgl. dazu das grundlegende Werk von Fisher/ Tippett 1928 und die mathematische Fundierung von Gnedenko 1943; ferner McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 266.

⁵⁰ Vgl. McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 267f.

Für die Modellierung der Exzesse findet die Verteilungsfamilie der Verallgemeinerten Paretoverteilung (GPD) Verwendung. Die GPD kann durch

$$(3.7) \quad G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x / \beta), & \xi = 0 \end{cases}$$

charakterisiert werden, wobei der entsprechende Definitionsbereich

$$D(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty), & \xi \geq 0 \\ [0, -\beta / \xi], & \xi < 0 \end{cases}$$

von den Parametern abhängt. Für $\xi > 0$ kann gezeigt werden, dass die Momente der Verteilung $E(X^\delta)$ endlich sind, sofern $\delta \geq 1/\xi$ gilt. Der Erwartungswert der GPD für $\xi < 1$ ist wie folgt darstellbar:

$$(3.8) \quad E(X) = \beta / (1 - \xi).^{51}$$

Nach dem Pickands-Balkema-de Haan-Theorem konvergiert die Exzessverteilung $F_u(y)$ bei steigender Schwelle u in Richtung des Endpunktes x_F gegen eine Verteilung der GPD-Familie $G_{\xi, \beta(u)}(y)$, so dass für eine positive Funktion $\beta(u)$ die Konvergenzaussage

$$(3.9) \quad \lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 < y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0$$

getroffen werden kann.⁵² Dies gilt jedoch nur, wenn die unterstellte Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X im Max-Anziehungsbereich der Verallgemeinerten Extremwertverteilung H_ξ für ein $\xi \in \mathbb{R}$ liegt, also $F \in MDA(H_\xi)$ vorliegt.

Bei expliziten Bezug auf die Verteilungsflanke kann man (3.9) durch

$$(3.10) \quad \overline{F}_u(y) = P(X - u > y | X > u) \approx \overline{G}_{\xi, \beta(u)}(y)$$

ersetzen, was sich bei der Bestimmung von Quantilen, wie z.B. bei dem Value-at-Risk, im nächsten Kapitel von Vorteil erweisen wird.⁵³

⁵¹ Vgl. Dölker 2006, S. 144 f.; McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 275 f.

⁵² Vgl. Balkema/ de Haan 1974; Pickands 1975.

⁵³ Vgl. Dölker 2007, S. 148.

3.2 Bestimmung der Quantile

Die Exzessverteilung F_u kann unter Zuhilfenahme der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung F wie folgt formuliert werden:

$$(3.11) \quad F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y > 0$$

Durch eine einfache Transformation kann man auch für die Verteilungsflanke $\bar{F}_u(y)$ einen Zusammenhang zu der Verteilungsflanke \bar{F} der Verteilung F herstellen:

$$(3.12) \quad \bar{F}_u(y) = P(X - u > y | X > u) = \frac{\bar{F}(u+y)}{\bar{F}(u)}, \quad y > 0.$$

Wenn man (3.12) nach $\bar{F}(u+y)$ umstellt, erhält man

$$(3.13) \quad \bar{F}(u+y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y),$$

womit eine Ausgangsbasis für die Schätzung von Quantile der Verteilungsfunktion F geschaffen wurde.⁵⁴ Denn nach der Schätzung von $\bar{F}(u)$ und $\bar{F}_u(y)$ fehlt nur noch die Kalkulation der Umkehrfunktion von $\bar{F}(u+y)$, respektive von $F(u+y)$.

Als Approximation der Verteilungsflanke $\bar{F}(u)$ bietet sich die empirische Verteilungsflanke $\bar{F}_n(u)$ an, was zur Schätzung

$$(3.14) \quad \hat{\bar{F}}(u) = \bar{F}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}} = \frac{N_u}{n}$$

führt.⁵⁵ Für die Schätzung von $\bar{F}_u(y)$ wird auf das in Kapitel 3.1 vorgestellte Pickands-Balkema-de Haan-Theorem zurückgegriffen, so dass mit Bezug auf (3.10) $\bar{F}_u(y)$ durch die Verteilungsflanke der Verallgemeinerten Paretoverteilung $\bar{G}_{\xi, \hat{\beta}}(y)$ mit

$$(3.15) \quad \bar{G}_{\xi, \hat{\beta}}(y) = (1 + \hat{\xi}y / \hat{\beta})^{-1/\xi}, \quad y > 0 \quad \xi \neq 0$$

⁵⁴ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 160 i.V.m. S. 353.

⁵⁵ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 354.

approximiert wird. Schließlich erhält man eine Schätzung $\hat{\bar{F}}(u + y)$ durch das Produkt der Schätzer aus (3.14) und (3.15):

$$(3.16) \quad \hat{\bar{F}}(u + y) = \hat{\bar{F}}(u) \bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y) = \bar{F}_n(u) \bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y) = \frac{N_u}{n} (1 + \hat{\xi}y / \hat{\beta})^{-1/\hat{\xi}}, \quad y > 0.$$

Bei Festlegung eines bestimmten Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ kann durch Inversion der geschätzten Verteilungsfunktion $\hat{F}(u + y)$, respektive $\hat{F}(x)$, unter Zuhilfenahme der Beziehung $\hat{F}(u + y) = 1 - \hat{\bar{F}}(u + y)$, ein bestimmter Quantilwert erreicht werden. Somit ergibt sich für $\hat{F}(x)$ die folgende Beziehung:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \hat{\bar{F}}(x) = 1 - \hat{F}(x) &= \bar{F}_n(u) (1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y)) \Leftrightarrow^{56} \\ \hat{F}(x) &= \bar{F}_n(u) G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y) + F_n(u), \quad x \geq u \end{aligned}$$

Eine Schätzung des $(1 - \alpha)$ -Quantils ergibt sich folglich, bei Fixierung von $F(x)$ auf die Wahrscheinlichkeitshöhe $(1 - \alpha)$, durch die Inversion

$$(3.18) \quad \hat{F}^{\leftarrow}(1 - \alpha) = G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}^{-1}(((1 - \alpha) - F_n(u)) / \bar{F}_n(u)) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\alpha \frac{n}{N_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)^{57}$$

Folglich ist auch der $VarR_\alpha$ gemäß (2.26) als Quantilwert bestimmbar, da er dem $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verlusthöhenfunktion entspricht.

3.3 Parameterschätzung

Zur Modellierung der Verlusthöhe X sei nun angenommen, dass X im $MDA(H_\xi)$ liegt, so dass für eine hinreichend hohe Schwelle u approximativ $F_u(y) = G_{\xi, \beta}(y)$ gilt.

Die zwei geläufigsten Methoden zur Anpassung der Funktion $G_{\xi, \beta}(y)$ an die Exzesse stellen dabei die Maximum Likelihood-Methode (ML) und die Wahrscheinlichkeitsgewichtete Momenten-Methode (WGM) dar.⁵⁸ Für $\xi > -0,5$ sind die ML-Bedingungen erfüllt und die Schät-

⁵⁶ Vgl. McNeil/ Saladin 1997, S. 8.

⁵⁷ Vgl. McNeil/ Saladin 1997, S. 10.

⁵⁸ Vgl. zur WGM-Methode Hosking/ Wallis 1987; Davison/ Smith 1990.

zer asymptotisch normalverteilt.⁵⁹ Frühere Studien haben gezeigt, dass der Formparameter für operationelle Verlusthöhen weit im positiven Bereich liegt, so dass für diese Verluste die ML-Methode stets anwendbar sein dürfte.

Bei gegebenem Datensatz X_1, \dots, X_n übersteigen N_u Verlusthöhen die Schwelle u , so dass diese Exzedenten sich durch X'_1, \dots, X'_{N_u} bezeichnen lassen. Der Exzessbetrag Y_j lässt sich nun durch $Y_j = X'_j - u$ bestimmen. Bei angenommener Unabhängigkeit des Datensatzes ist die gemeinsame Dichtefunktion zugleich das Produkt der marginalen GPD-Dichten $g_{\xi, \beta}(y) = \beta^{-1} (1 + \xi y / \beta)^{-1/\xi - 1}$.⁶⁰ Der Log-Likelihood kann für $\xi \neq 0$ durch

$$(3.19) \quad \ln L(\xi, \beta; Y_1, \dots, Y_{N_u}) = \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi, \beta}(Y_j) = -N_u \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Y_j}{\beta}\right)$$

bestimmt werden. Eine Maximierung dieser Funktion mit Hinblick auf die Parameter ξ und β unter Einhaltung der Nichtnegativität der Logarithmus-Funktion liefert eine Schätzung $G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}$ für die bedingte Exzessfunktion F_u .⁶¹

3.4 Schwellenwertfestlegung

Das Auffinden einer geeigneten Schwelle ist bei der praktischen Umsetzung des POT-Modells ein kritischer Punkt, da die Schätzungen der Parameter der Verteilung damit die resultierenden Quantile höchst sensitiv gegen eine veränderte Schwelle u reagieren.⁶²

Hohe Schwellen bieten den Vorteil, dass die Exzess-Daten besser durch die GPD-Verteilung approximiert werden können. Jedoch reduziert man zwangsläufig die Verfügbarkeit historischer Exzesse bei höheren Schwellen. Dadurch erhöht sich die Varianz der Parameterschätzungen. In anderen Worten, eine Erhöhung der Schwelle reduziert den Bias der Schätzung, erhöht aber die Schwankungsbreite möglicher Schätzungen.⁶³

⁵⁹ Vgl. Hosking/ Wallis 1987; McNeil/ Saladin 1997, S. 8.

⁶⁰ Vgl. Smith 1987, S. 1204.

⁶¹ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 356 ff.; Smith 1987, S. 1177 ff.

⁶² Vgl. McNeil/ Saladin 1997, S. 10 ff.

⁶³ Vgl. Alfarano/ Lux 2004, S. 4.

In der Literatur gibt es eine Reihe von Lösungsansätzen, um eine geeignete Schwelle zu ermitteln.⁶⁴ Dem Beispiel von *Dutta/Perry* (2006) folgend, kann man eine der aufgeführten Methoden zur Bestimmung der Schwelle u in Betracht ziehen:

1. Bias-Varianz-Bootstraping Methoden
2. Graphische Methoden (Hill-Plot, Mean-Excess-Plot, etc.)
3. Ad-hoc Methoden
4. Goodness-of-fit-Tests.

Das 1. und 2. Verfahren werden im Folgenden näher betrachtet. Bei der Ad-hoc-Methode werden die Schwellen heuristisch auf höhere Quantile gesetzt. Die Goodness-of-fit-Tests geben meistens einen größeren Bereich an, in der eine Schwelle liegen kann. Sie lösen jedoch nicht das Problem, eine optimale Schwelle zu finden.

3.4.1 Bias-Varianz-Bootstraping Methode

Diese auf *Danielsson et al.* (2001) basierende Methode generiert eine optimale Schwelle u , indem der Trade-off zwischen Biasproblematik bei zu niedriger Schwelle und Varianzproblematik bei zu hoher Schwelle explizit berücksichtigt wird.⁶⁵ Als Grundlage zur Analyse des Trade-offs wird der Hill-Schätzer α^H bei gegebener Ordnungsstatistik $X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$ für den Datenbereich X_1, \dots, X_n verwendet. Er stellt ein Schätzer für den Tail-Index α dar, der für die Bestimmung des Verteilungsendes

$$(3.20) \quad \bar{F}(x) = L_{\text{var}}(x)x^{-\alpha} = L_{\text{var}}(x)x^{-1/\xi}$$

für eine Verteilung $F \in MDA(H_\xi)$ mit $\xi > 0$ eine Rolle spielt. Der Hill-Schätzer ergibt sich aus

$$(3.21) \quad \hat{\alpha}_{k,n}^H = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}, \quad 2 \leq k \leq n \quad ,$$

⁶⁴ Vgl. Beirlant/ Teugels/ Vynckier 1996; Danielsson et al. 2001; Dekkers/ de Haan 1993; Drees/ Kaufmann 1998; Hall 1990; Matthys/ Beirlant 2003.

⁶⁵ Vgl. Danielsson et al. 2001; Diebold et al. 2000, S. 3.

wobei $X_{k,n}$ die k -te Ordnungsstatistik bezeichnet.⁶⁶ *Danielsson et al.* (2001) verwenden bei Durchführung der Methode das reziproke Verhältnis $\xi := \alpha^{-1}$, um eine optimale Ordnungsstatistik $k_0^*(n)$ zu ermitteln, die den mittleren quadratischen Fehler (MSE) zwischen Schätzer $\hat{\xi}^H(k)$ und Parameter ξ minimiert, formal

$$(3.22) \quad k_0^*(n) := \arg \min_k MSE(n, k) = \arg \min_k E[(\hat{\xi}^H(k) - \xi)^2].^{67}$$

Das Auffinden der optimalen Ordnungsstatistik $k_0^*(n)$ für den Parameterschätzer $\hat{\xi}^H$ kann als Proxy verwendet werden, um eine optimale Schwelle u zu generieren, die einen geringen MSE des geschätzten Formparameters $\hat{\xi}$ bei einer GPD-Anpassung erwarten lässt. Die Minimierung des MSE stellt eine natürliche Wahl dar, da dadurch der Trade-off zwischen Bias und Varianz (*Var*) eine explizite Berücksichtigung findet, was die verallgemeinerte Formulierung

$$(3.23) \quad \begin{aligned} MSE(n, k) &= E[(\hat{\xi}^H(k) - \xi)^2] = Var(\hat{\xi}^H(k)) + \left(E[\hat{\xi}^H(k) - \xi] \right)^2 \\ &= Var(\hat{\xi}^H(k)) + Bias^2(\hat{\xi}^H(k)) \end{aligned}$$

verdeutlicht.⁶⁸

Zur Schätzung bzw. Optimierung von $MSE(n, k)$ im Hinblick auf $k_0(n)$ wird ein Bootstrapping-Verfahren eingesetzt. Beim Bootstrapping werden B neue Stichproben (Bootstrap-Stichproben) aus dem vorliegenden Datensatz gezogen, wobei diese Stichproben im grundlegendsten Fall auch den Umfang des Ausgangsdatsatzes haben. Die Ziehung erfolgt „mit Zurücklegen“, folglich kann ein Element der Ausgangsstichprobe häufiger vorkommen.⁶⁹

Es entstehen jedoch folgende zwei Probleme. Um den Standardfehler MSE minimieren zu können, müsste der wahre Parameter ξ bekannt sein.⁷⁰ Aber selbst wenn ξ bekannt wäre, besteht bei der Generierung von Bootstraps, die die gleiche Datenanzahl n haben wie der Ausgangsdatsatz, die Gefahr, dass der MSE-Schätzer nicht zwangsläufig asymptotisch zu

⁶⁶ Vgl. Hill 1975; Hall 1982; McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 287; in der Literatur wurden auch alternative Konzepte zur Schätzung des Tail-Indexes α vorgeschlagen, vgl. dazu Pickands 1975 und Dekkers/ Einmahl/ de Haan 1989.

⁶⁷ Vgl. Danielsson 2001, S. 230.

⁶⁸ Vgl. Alfarano/ Lux 2004, S. 7 f.; McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 289 ff.

⁶⁹ Vgl. zu dem Bootstrapping-Verfahren Efron/ Tibshirani 1993.

⁷⁰ Vgl. Hall 1982, S. 37 ff.; Dekkers/de Haan 1993.

dem Standardfehler $MSE(n, k)$ sein muss. *Danielsson et al.* 2001 lösen das letzte Problem, indem die Bootstrap-Stichproben nur den Umfang n_1 mit $n_1 < n$ haben, was die Ordnungsstatistik $X_{n_1, n_1}^* \leq \dots \leq X_{1, n_1}^*$ zur Folge hat. Dementsprechend wird der Parameter ξ für n_1 durch

$$(3.24) \quad \hat{\xi}_{n_1}^H(k_1) := \frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{k_1} \log X_{j, n_1}^* - \log X_{k_1, n_1}^*$$

bestimmt. Zudem wird für (3.23) ein Bootstrap-Schätzer

$$(3.25) \quad Q(n_1, k_1) := E\left(\left(M_{n_1}(k_1) - 2(\hat{\xi}_{n_1}^H(k_1))^2\right)^2\right)$$

für den mittleren quadratischen Fehler (MSE) verwendet, wobei sich $M_{n_1}(k_1)$ über

$$(3.26) \quad M_{n_1} = \frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{k_1} (\log X_{j, n_1}^* - \log X_{k_1, n_1}^*)^2$$

bestimmt. Somit wird das Problem des unbekannt Parameters ξ umgangen. Der nächste Schritt besteht im Auffinden des k -Werts $k_{1,0}^*(n_1)$, der (3.25) minimiert. Daraufhin werden noch kleinere Bootstraps mit dem Umfang n_2 mit $n_2 = (n_1)^2 / n$ gezogen, und es wird analog $k_{2,0}^*(n_2)$ durch Minimierung von $Q(n_2, k_2)$ generiert. Da der optimale k -Wert k_0 für den Stichprobenumfang n von Interesse ist, lässt sich k_0 durch die Werte $k_{1,0}^*(n_1)$ und $k_{2,0}^*(n_2)$ wie folgt schätzen:

$$(3.27) \quad \hat{k}_0(n) := \frac{(k_{1,0}^*(n_1))^2}{k_{2,0}^*(n_2)} \left(\frac{(\log k_{1,0}^*(n_1))^2}{(2 \log n_1 - \log k_{1,0}^*(n_1))^2} \right)^{\frac{\log n_1 - \log k_{1,0}^*(n_1)}{\log n_1}}.$$

Zur Durchführung des Schätz-Algorithmus stehen zwei Stellschrauben zur Verfügung. Zum einen muss der Umfang der kleineren Bootstraps n_1 bestimmt werden, wobei n_1 so ausgestaltet sein sollte, dass für ein ε mit $0 < \varepsilon < 1/2$ $n_1 = n^{1-\varepsilon}$ gilt. Die Autoren schlagen ein n_1 vor, dass eine Minimierung des Verhältnisses

$$(3.28) \quad R(n_1) = \frac{(Q(n_1, k_{1,0}^*))^2}{Q(n_2, k_{2,0}^*)}$$

liefert. In der praktischen Umsetzung wird n_1 über einen diskreten Bereich variiert, um (3.28) zu minimieren.

Die andere Stellschraube betrifft die Anzahl der neu gezogenen Bootstraps B , die sich an der Kapazität des verwendeten Computers orientieren sollte. Es kann ferner ein Stopp-Kriterium definiert werden, dass die Erzeugung neuer Bootstraps abschließt, wenn die Schwankung des Bootstrap-MSEs unter eine gewisse Schwelle fällt.

Somit ergibt die k_0^* -te Ordnungsstatistik $X_{k_0^*,n}$ ein geeignetes Schwellenniveau u ab der die Exzesse an die GPD-Verteilung angepasst werden können.

3.4.2 Mean-Excess-Plot

In verschiedenen Studien zur Modellierung operationeller Risiken werden zur Bestimmung geeigneter Schwellen graphische Methoden eingesetzt. Dabei spielte insbesondere der Mean-Excess (ME)-Plot, der auf dem Konzept der Mean-Excess-Funktion basiert, eine entscheidende Rolle.⁷¹ Die Mean-Excess-Funktion $e(u)$ gibt unter der Bedingung, dass die Zufallsvariable die Schwelle überschreitet, für eine gegebene Schwelle u den erwarteten Exzess an, formal

$$(3.29) \quad e(u) = E(X - u | X > u).^{72}$$

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $F(x)$ kann (3.29) durch

$$(3.30) \quad e(u) = \int_u^{x_F} (x - u) dF(x) / \bar{F}(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^{x_F} \bar{F}(x) dx, \quad 0 < u < x_F$$

ausgedrückt werden. Für ein regulär variierendes Verteilungsende mit Tailindex $\alpha > 1$ kann für $u \rightarrow \infty$ mit Hilfe des Theorems von Karamata gezeigt werden, dass

$$(3.31) \quad e(u) \sim u/(\alpha - 1)$$

entspricht, woraus ein linearer Verlauf der ME-Funktion für diese spezielle Verteilungen gefolgert werden kann.⁷³

⁷¹ Vgl. zur Interpretation von ME-Plots Beirlant/ Teugels/ Vynckier 1996; Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997; Hogg/ Klugman 1984.

⁷² In Finanzmarktanwendungen wird das rechte Verteilungsende durch das linke ersetzt, da das Risiko sich im Unterschreiten einer Zielgröße z manifestiert. Die Kenngröße ist als Shortfall-Erwartungswert bekannt, vgl. Albrecht 1993; Albrecht 1994; Albrecht/ Möller/ Maurer 1998.

⁷³ Vgl. Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997, S. 160 ff., Mikosch 2004, S. 94 ff.; zu dem Karamata-Theorem

Für das GPD-Modell kann auch gezeigt werden, dass die ME-Funktion mit steigendem Schwellenniveau ansteigen muss. Für eine Schwelle $v \geq u$ folgt die Exzessverteilung $F_v(y)$ auch einer GPD mit gleichem Formparameter ξ , jedoch steigt der Skalierungsparameter β_v linear mit der Schwelle v an, so dass

$$(3.32) \quad F_v(y) = G_{\xi, \beta_v} = G_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(y)$$

gilt.⁷⁴ Dadurch bestimmt sich die ME-Funktion für ein gegebenes Schwellenniveau $v \geq u$ und $\xi < 1$ über den Erwartungswert der GPD aus (3.8) mit Parametern ξ und β_v

$$(3.33) \quad e(v) = \frac{\beta_v}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi(v-u)}{1-\xi} = \frac{\xi v}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}.$$

Man kann für (3.33) die Linearität in v erkennen, so dass mit steigendem Schwellenniveau die ME-Funktion linear mit Steigung $\xi/(1-\xi)$ verläuft.

Der empirische Plot dieser Funktion wird für verschiedene Ordnungsstatistiken $X_{i,n}$ abgetragen, wobei der empirische Schätzer für eine Schwelle u sich aus

$$(3.34) \quad e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) I_{\{X_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

ergibt. Der Mean-Excess-Plot bildet nun für jede Ordnungsstatistik $X_{i,n}$ im Bereich $\{2 \leq i \leq n\}$ den Schätzer $e_n(X_{i,n})$ ab.

Wenn der zugrunde liegende Datensatz nun ein GPD-Modell unterstützt, so sollte der Mean-Excess-Plot linear in Abhängigkeit des Schwellenniveaus ansteigen. Ein heuristischer Ansatz zur Bestimmung einer geeigneten Schwelle liegt nun im Auffinden eines Schwellenniveaus, ab dem der Mean-Excess-Plot einen positiven linearen Verlauf zeigt.

Im Folgenden wird für $N=1000$ simulierte Daten aus einer Log-Gammaverteilung der Mean-Excess-Plot dargestellt. Die log-gammaverteilte Zufallsvariable Y wurde dabei aus einer gammaverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $\alpha_G=1.5$ und $\beta_G=1$ generiert, wobei die Beziehung $Y = e^X$ Anwendung gefunden hat. Die Log-Gammaverteilung ist

vgl. Feller 1971.

⁷⁴ Vgl. zu dem Beweis McNeil/ Frey/ Embrechts 2005, S. 279.

im Max-Anziehungsbereich der Frechét-Verteilung, so dass $Y \in MDA(H_\xi)$ mit $\xi > 0$ gilt. Somit ist aufgrund des stark ausgeprägten Randbereichs der Verteilung beim Mean-Excess-Plot der simulierten Stichprobe ein positiver Anstieg zu erwarten, was sich in Abbildung 3.1 auch so widerspiegelt. Dies lässt darauf schließen, dass man die Daten ab einer bestimmten Schwelle mit einer GPD-Verteilung mit positivem Parameter ξ approximieren könnte. Nach der heuristischen Schwellenfestlegung auf Basis des Mean-Excess-Plots käme sogar eine Schwellenfestlegung bei $u = 1$ in Betracht. Da die Schwelle aber hinreichend groß sein sollte, wird im Folgenden $u = 50$ gewählt.

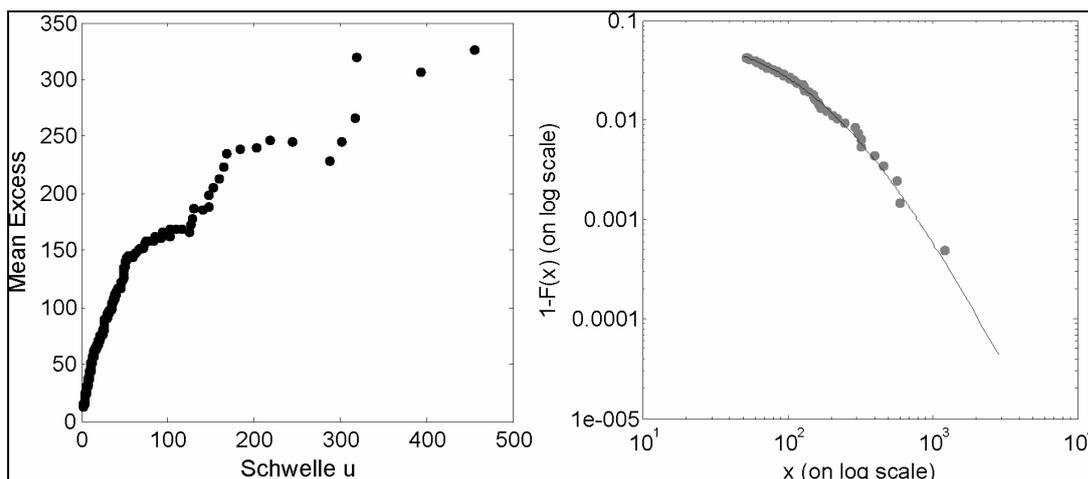


Abb. 3.1

Bei Durchführung einer Anpassung der Exzesse über eine Schwelle $u = 50$ resultieren gemäß der Maximum-Likelihood-Methode die Parameterschätzer $\hat{\xi} = 0.3604$ und $\hat{\beta} = 91.7$. In Abbildung 3.1 ist die Anpassung der simulierten Verteilungsflanke durch die Verallgemeinerte Paretoverteilung dargestellt, wobei über den gesamten Bereich eine gute Anpassung stattfindet.

4. Modellierung auf Basis der GH-Verteilung

4.1 Explorative Datenanalyse als Ausgangsbasis

Bevor ein parametrisches Modell für die Verlusthöhen auf Basis eines Datensatzes gebildet wird, ist es ratsam sich über die Schiefe und Kurtosis der zugrunde liegenden Verteilung ein Bild zu verschaffen. Dabei kann auf eine Analysemethode, die erstmals durch *Tukey 1977b* dargestellt und von *Hoaglin 1985a* verfeinert wurde, zurückgegriffen werden. Diese Methode

beurteilt die Schiefe und die Kurtosis des Datensatzes relativ zur Normalverteilung.⁷⁵ Als Ausgangspunkt werden ausgewählte Quantile der Verteilung, sog. Letter Values verwendet. Die Quantile werden so gewählt, dass ausgehend vom Median, dem $\alpha = 1/2$ -Quantil $Q_{0.5}$, die Wahrscheinlichkeitshöhe α sukzessive halbiert wird, wodurch $\alpha = 1/4, 1/8, 1/16, \dots$ folgt. Damit werden insbesondere Quantile aus dem Randbereich der Verteilung berücksichtigt.⁷⁶

Wenn ein symmetrischer Datensatz $\{X_i\}_{i=1}^N$ vorliegt, muss für jedes gewählte α

$$(4.1) \quad Q_{(1-\alpha)} - Q_{0.5} = Q_{0.5} - Q_{\alpha}$$

gelten. Als Analysetool kann ferner für jedes α eine Mid-Summary

$$(4.2) \quad mid_{\alpha} = \frac{1}{2}(Q_{\alpha} + Q_{(1-\alpha)})$$

gebildet werden, die bei Symmetrie stets dem Median entsprechen muss. Dabei kann eine Graphik, die mid_{α} gegen α abträgt, sehr hilfreich sein, um eine Schiefe zu diagnostizieren. So ist für eine Log-Gamma-Verteilung mit zugrunde liegender Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha_G = 1.5$ und $\beta_G = 1$ die Mid-Summary in Abbildung 4.1 ersichtlich. Aufgrund der Rechtsschiefe der Verteilung ist ein starker Anstieg der Mid-Summary zu verzeichnen.

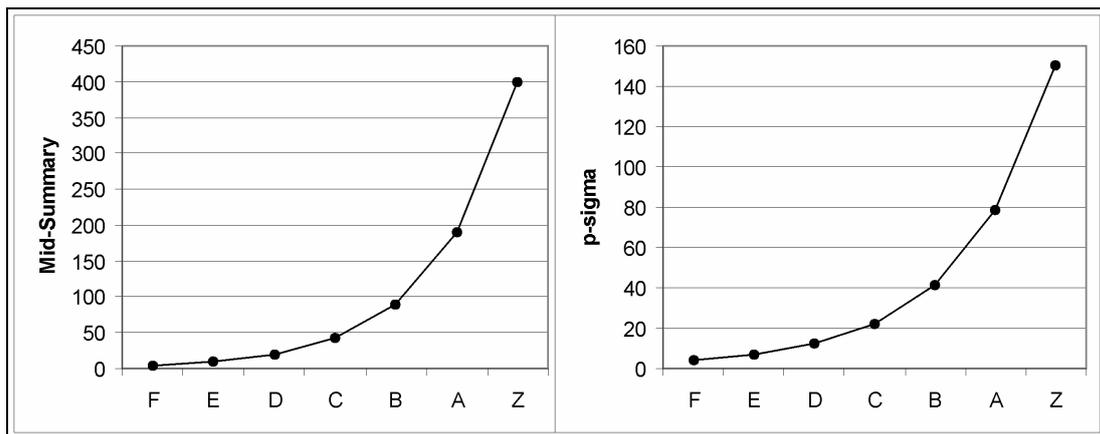


Abb. 4.1

Zur Messung der Kurtosis wird die Pseudosigma-Statistik

$$(4.3) \quad p - sigma = \frac{(Q_{(1-\alpha)} - Q_{\alpha})}{2Z_{(1-\alpha)}}$$

⁷⁵ Vgl. Dutta/Perry 2006, S. 7; Hoaglin 1985a, S. 417 ff.; Tukey 1977b.

⁷⁶ Vgl. Hoaglin 1985a, S. 419ff.; Mandl 2007, S. 4.

konstruiert, wobei $Z_{(1-\alpha)}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung darstellt. Mit der Pseudosigma-Statistik wird die positive Distanz des Letter Value-Paars auf die äquivalente Distanz einer Standardnormalverteilung bezogen. Für eine Normalverteilung ist für verschiedene α -Werte die Pseudosigma-Statistik konstant, und zwar in Höhe der Standardabweichung σ . Für einen leptokurtischen Datensatz steigt mit sinkendem α die Statistik an, so dass von starken Verteilungsrändern ausgegangen werden kann. Für Datensätze mit niedriger Kurtosis verhält sich das Bild entsprechend umgekehrt.⁷⁷

Für die Log-Gammaverteilung in Abbildung 4.1 ist das Bild wieder eindeutig. Der leptokurtische Charakter der Verteilung führt zu einem Anstieg der Pseudosigma-Statistik.

4.2 Darstellung der Verteilungsklasse

Die GH-Verteilung wurde erstmals durch *Tukey* 1977a eingeführt, und basiert auf einer Transformationsfamilie einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim N(0,1)$, so dass für eine Parameterwahl g und $h \geq 0$ eine Zufallsvariable

$$(4.4) \quad Y_{g,h}(Z) = (e^{gZ} - 1) \frac{\exp(hZ^2/2)}{g}$$

entsteht. Dabei ist der Parameter g für die Schiefe der Verteilungsfamilie verantwortlich, wohingegen über den Parameter h die Kurtosis gesteuert werden kann. Zusätzlich lassen sich zwei Parameter für Lage (a) und Skalierung (b) einbauen, so dass durch

$$(4.5) \quad X_{g,h}(Z) = a + bY_{g,h}(Z)$$

eine Zufallsvariable X determiniert wird, die GH-verteilt ist ($X \sim GH$).⁷⁸

Diese Verteilungsfamilie fand im Kontext der Modellierung operationeller Verlusthöhen durch *Dutta/Perry* 2006 schon Verwendung.⁷⁹ *Dutta/Perry* 2006 betonen dabei, dass die GH-Verteilung eine hohe Anpassungsgüte an die Daten aufweist, was an der großen Variationsmöglichkeit dieser Verteilungsfamilie liegt. Die GH-Familie kann insbesondere gefährliche Verteilungen gut approximieren. So sind durch eine Wahl positiver Werte für die Parameter

⁷⁷ Vgl. zur Mid-Summary- und Pseudo-Sigma-Statistik Hoaglin 1985a, S. 421 ff. u. 426 ff.

⁷⁸ Vgl. Tukey 1977a; Martinez/Iglewicz 1984, S. 354 ff.; Hoaglin 1985b, S. 485 ff.

⁷⁹ Vgl. Dutta/Perry 2006, S. 16 ff., die GH-Verteilung fand zuvor für Finanzmarktanwendungen Berücksichtigung, vgl. Badrinath/Chatterjee 1991; Mills 1995; Fischer et al. 2003; Dutta/Babbel 2002.

g und h besonders gefährliche Verteilungen darstellbar.⁸⁰ Aufgrund der engen Verknüpfung zur Standardnormalverteilung können durch die Verwendung der GH-Verteilung weitere Vorteile erzielt werden. So ist eine Monte Carlo-Simulation sehr leicht umsetzbar, was in Kapitel 5 zur Berechnung der Gesamtverlustverteilung noch von Hilfe sein wird.

Ausgehend von (4.4) u. (4.5) können zudem die Spezialfälle

$$(4.6a) \quad X_g = a + b \frac{(e^{gZ} - 1)}{g} \text{ die G-Verteilung } h = 0 \text{ bzw.}$$

$$(4.6b) \quad X_h = a + Zbe^{(hZ^2/2)} \text{ die H-Verteilung } g = 0$$

abgeleitet werden.

4.3 Bestimmung der Quantile

Die flexible Anpassung an operationelle Datensätze kann jedoch nur erreicht werden, wenn sämtliche Parameter in Betracht gezogen werden, so dass die Zufallsvariable

$$(4.7) \quad X_{g,h} = a + b \frac{(e^{gZ} - 1)}{g} e^{(hZ^2/2)}$$

verwendet werden sollte. Unter der Annahme $h > 0$ ist die Bestimmung der Quantile der GH-Verteilung analytisch leicht zu bewerkstelligen, da dies der Fall einer streng monotonen Transformation einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen ist.⁸¹ Mit Hilfe der Funktion

$$(4.8) \quad k(x) = a + b \frac{(e^{gx} - 1)}{g} e^{(hx^2/2)}$$

lässt sich die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariable $X_{g,h}$ durch

$$(4.9) \quad F = \Phi(k^{-1}(x))$$

charakterisieren, wobei Φ für die Standardnormalverteilung steht.⁸² Somit ist auch die Bestimmung der Quantile bzw. des Value-at-Risks über

$$(4.10) \quad \text{VaR}_{(1-\alpha)}(X_{g,h}) = k(\Phi^{-1}(1-\alpha)) = k(Z_{(1-\alpha)}) \quad , \text{ für } 0 < \alpha < 1$$

⁸⁰ Vgl. Albrecht/ Schwake/ Winter 2007, S. 30.

⁸¹ Vgl. Mandl 2007, S. 10.

⁸² Vgl. Martinez/ Iglewicz 1984, S. 354; Degen et al. 2006, S. 6.

möglich.⁸³ Dieser Zusammenhang wird im Kapitel 5 ausgenutzt, um die empirische Verteilung des SAS-Datensatzes mit der parametrischen Verteilung zu vergleichen.

4.4 Parameterschätzung

Im Vergleich zu der Maximum-Likelihood-Methode bildet die von *Tukey* 1977 entwickelte quantilbasierte Methode Vorteile bei der Anpassung, insbesondere gilt dies für den Bereich im Verteilungsrand.⁸⁴

Diese Methode sucht in einem ersten Schritt den optimalen Parameter g . Für verschiedene α -Höhen wird ein Wert g_α bestimmt, der das α -Quantil und das zugehörige $(1-\alpha)$ -Quantil der Verteilung exakt anpasst. Die Gleichungen

$$(4.11) \quad \begin{aligned} x_\alpha &= a + by_\alpha = a + b \frac{e^{gz_\alpha} - 1}{g} e^{hz_\alpha^2/2} \\ x_{1-\alpha} &= a + by_{1-\alpha} = a + b \frac{e^{-gz_\alpha} - 1}{g} e^{hz_\alpha^2/2}, \end{aligned}$$

für das Letter Value-Paar ($\alpha < 0.5$) sind jeweils nur für ein bestimmten g_α -Wert erfüllt.⁸⁵ Zudem wird unterstellt, dass der Median $y_{0.5}$ Null beträgt, so dass der Median $x_{0.5}$ gerade dem Parameter a entsprechen muss. Unter diesen Annahmen erzielt man das Ergebnis

$$(4.12) \quad e^{-gz_\alpha} = \frac{x_{1-\alpha} - x_{0.5}}{x_{0.5} - x_\alpha},$$

womit sich g_α unter Verwendung des upper half-spread UHS_α und des lower half-spread LHS_α durch

$$(4.13) \quad g_\alpha = -\frac{1}{z_\alpha} \ln\left(\frac{x_{1-\alpha} - x_{0.5}}{x_{0.5} - x_\alpha}\right) = -\frac{1}{z_\alpha} \ln\left(\frac{UHS_\alpha}{LHS_\alpha}\right)$$

⁸³ Vgl. Degen et al. 2006, S. 6.

⁸⁴ Vgl. Dutta/Perry 2006, S. 17; Tukey 1977.

⁸⁵ Vgl. Badrinath/ Chatterjee 1991, S. 455; Hoaglin 1985b, S. 468 ff. Hierbei wird das Verhältnis $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ berücksichtigt.

bestimmen lässt. Dabei spielt h für die Bestimmung von g keine Rolle mehr, da der Term $e^{hz_\alpha^2/2}$ sich entsprechend herauskürzt. Hoaglin 1985 schlägt zur Festlegung von g den Median der g_α -Werte vor.⁸⁶

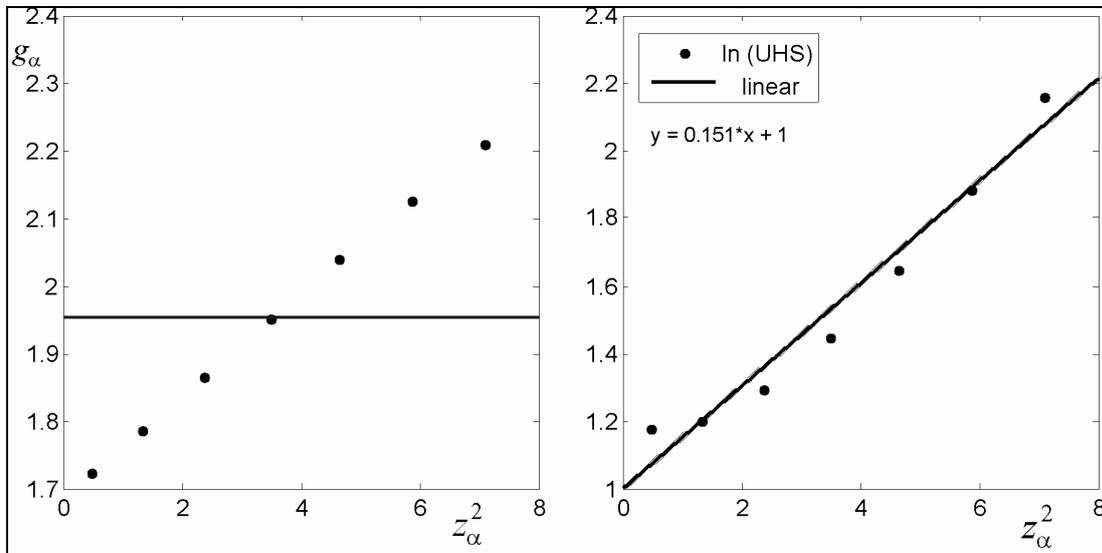


Abb. 4.2

Für die betrachtete Log-Gammaverteilung sind die g_α -Werte in Abbildung 4.2 ersichtlich. Dabei fällt auf, dass die Werte mit sinkendem α ansteigen. Dies kann darauf hindeuten, dass ein komplexeres Modell eventuell zum Einsatz kommen muss.⁸⁷

Um nun g zu bestimmen, wird nun analog zu Hoaglin 1985b der Median der g_α -Werte kalkuliert, was zu einer Parameterschätzung von $g = 1.95$ führt. Im nächsten Schritt wird der Parameter h näher untersucht. Für rechtsschiefe Verteilungen bietet sich zur Evaluation der upper half-spread $UHS_\alpha = x_{1-\alpha} - x_\alpha$ an, der sich über

$$(4.14) \quad UHS_\alpha = x_{1-\alpha} - x_\alpha = \frac{b}{g} \left(e^{-gz_\alpha} - 1 \right) e^{hz_\alpha^2/2}$$

bestimmt. Durch beidseitige Division mit $(e^{-gz_\alpha} - 1)/g$ erhält man den adjustierten upper half-spread UHS_α^* über

$$(4.15a) \quad UHS_\alpha^* = \frac{g(x_{1-\alpha} - x_{0.5})}{e^{-gz_\alpha} - 1} = be^{hz_\alpha^2/2} \quad \text{bzw. in logarithmierter Form}$$

⁸⁶ Vgl. Hoaglin 1985b, S. 469; sowie die Anwendung von Badrinath/ Chatterjee 1991, S. 455.

⁸⁷ Vgl. dazu die späteren Ausführungen in diesem Kapitel.

$$(4.15b) \quad \ln(UHS_{\alpha}^*) = \ln(b) + \bar{h} z_{\alpha}^2 = \ln(b) + \frac{h}{2} z_{\alpha}^2. \quad 88$$

Durch eine Regression von $\ln(UHS_{\alpha}^*)$ auf z_{α}^2 erhält man als Steigung den Parameter \bar{h} und über die Beziehung $h = 2\bar{h}$ folglich auch den gesuchten Parameter h . Der Achsenabschnitt entspricht $\ln(b)$, wodurch b sich entsprechend einfach bestimmen lässt.⁸⁹

Für die Log-Gammaverteilung wird die anstehende Regression in Abbildung 4.2 veranschaulicht. Der Achsenabschnitt beträgt 1, somit ergibt sich nach Auflösen der Gleichung $\ln(b) = 1$ der Parameterwert $b = 2.72$. Der Parameter ergibt sich als Steigung der Regressionsgeraden, womit eine Schätzung für h in Höhe von 0.3 vorgenommen wird.

Verallgemeinerung der Parameter

Die Parameter g und h können auch als Polynome in Z^2 ausgedrückt werden. Es sind sogar Polynome eines höheren Grades denkbar.⁹⁰ Ein Ansteigen der g_{α} -Werte mit kleineren α -Werten wie in Abbildung 4.2 deutet daraufhin, dass ein komplexeres Modell zur Beschreibung der Parameter angebracht erscheint. So kann der Parameter g als Funktion von z ausgedrückt werden, indem man ihn als Polynom in Z^2 modelliert, wobei eine Ausgangsbasis wie folgt aussehen könnte:

$$(4.16) \quad g(z) = g_0 + g_2 z^2.$$

Durch eine Regression der g_{α} -Werte auf z_{α}^2 kann man folglich die entsprechenden Parameter g_0 und g_2 bestimmen. Ob nun ein Polynom höheren Grades in Z^2 Verwendung finden sollte, kann durch das aus der Regression resultierende Bestimmtheitsmaß R^2 gefolgert werden. So fordern *Babbel/Dutta* (2002) ein Bestimmtheitsmaß von mindestens 0.95, damit das Polynomial-Modell übernommen wird, ansonsten haben die Autoren das Modell mit einem Parameter verwendet.⁹¹

Für das Beispiel mit der Log-Gammaverteilung wird bei der Regression der g_{α} -Werte auf z_{α}^2 eine gute Anpassung erzielt, was durch das Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,9996$ bestätigt

⁸⁸ Vgl. Hoaglin 1985b, S. 487; Mills 1995, S. 326 f.; Badrinath/ Chatterjee 1991, S. 457, wobei hier der Full Spread verwendet wird.

⁸⁹ Vgl. Hoaglin 1985b, S. 487.

⁹⁰ Vgl. Dutta/Perry 2006; Mills 1995.

⁹¹ Vgl. Dutta/ Babbel 2002, S. 7 f.

wird. Die resultierenden Parameter bei Verwendung eines Polynom 2. Grades sind folglich $g_0 = 1.69$ und $g_2 = 0.074$.

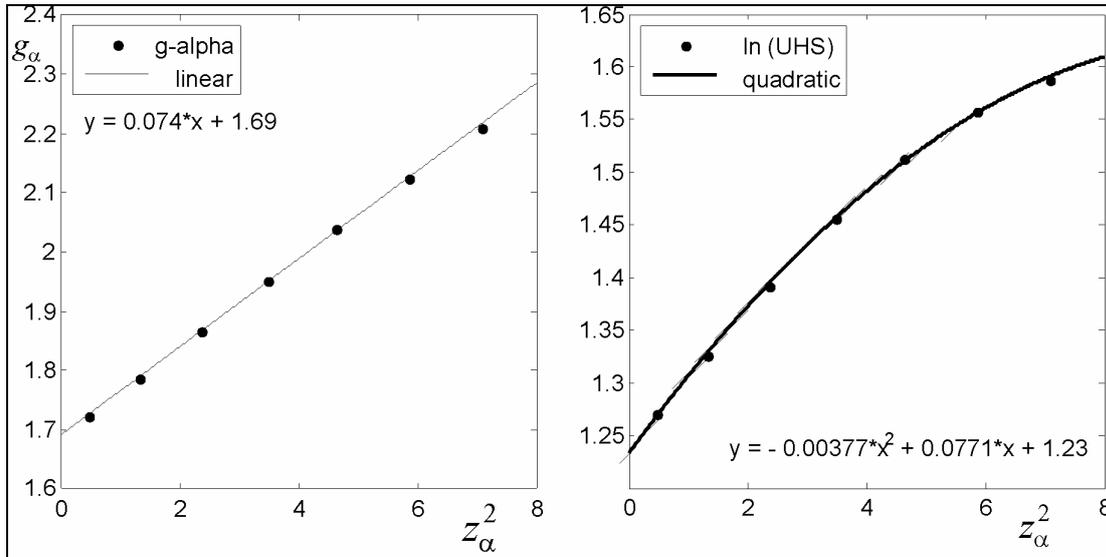


Abb. 4.3

Entsprechend kann auch der Parameter h nach Festlegung des Modells für g als Polynom in Z^2 bestimmt werden, so dass man h z.B. über

$$(4.17) \quad h(z) = h_0 + h_2 z^2$$

festsetzen kann.⁹² Zur Umsetzung wird wieder der adjustierte upper half-spread UHS_α^* berechnet, bei dem nun g und h jedoch von z abhängen, formal

$$(4.18) \quad UHS_\alpha^* = \frac{g(z_\alpha)(x_{1-\alpha} - x_{0.5})}{e^{-g(z_\alpha)z_\alpha} - 1} = b e^{h(z_\alpha)z_\alpha^2/2}.$$

Zur Generierung der Parameter wird bei Verwendung eines Polynom höheren Grades eine Anpassung von $\ln(UHS_\alpha^*)$ durch

$$(4.19) \quad \ln(b) + \bar{h}_0 z_\alpha^2 + \bar{h}_2 z_\alpha^4 \quad \text{bzw.} \quad \ln(b) + \frac{h_0}{2} z_\alpha^2 + \frac{h_2}{2} z_\alpha^4$$

vorgenommen.⁹³

⁹² Vgl. Hoaglin 1985b, S. 490 f.

⁹³ Vgl. Hoaglin 1985b, S. 491.

Bei Anwendung der Methode auf das Log-Gamma-Beispiel erreicht man bei der Regression ein hohes Bestimmtheitsmaß, so dass eine weitere Ausweitung des Polynoms nicht angebracht erscheint. Der Parameter b ergibt sich durch Auflösen der Gleichung $\ln(b)=1.27$, ferner kann die Parametrisierung für h aus der Tabelle 4.1 entnommen werden.

Polynom \	b	h_0	h_2	R^2
linear	3,56	0,0977	-----	0,9789
quadratisch	3,42	0,1542	-0,0075	0,9996

Tab. 4.1

Ergebnisse

Die resultierenden Parameter der Anpassung einer GH-Verteilung an die beispielhafte Log-Gamma-Verteilung können aus der Tabelle 4.1 entnommen werden. Die Approximationsgüte der verwendeten Modelle an die theoretische Verteilung wird in Abbildung 4.4 dargestellt. Es wird für verschiedene Wahrscheinlichkeitshöhen α die prozentuale Differenz des α -Quantils der Log-Gammaverteilung und der geschätzten GH-Verteilung abgetragen. Dabei fällt auf, dass das Modell mit Polynomverwendung die Log-Gammaverteilung für sämtliche Quantile hervorragend approximiert. Im Extrembereich schneidet es sogar viel besser als das Modell mit konstantem Parameter ab, womit sich der Parameteraufwand gelohnt hat.

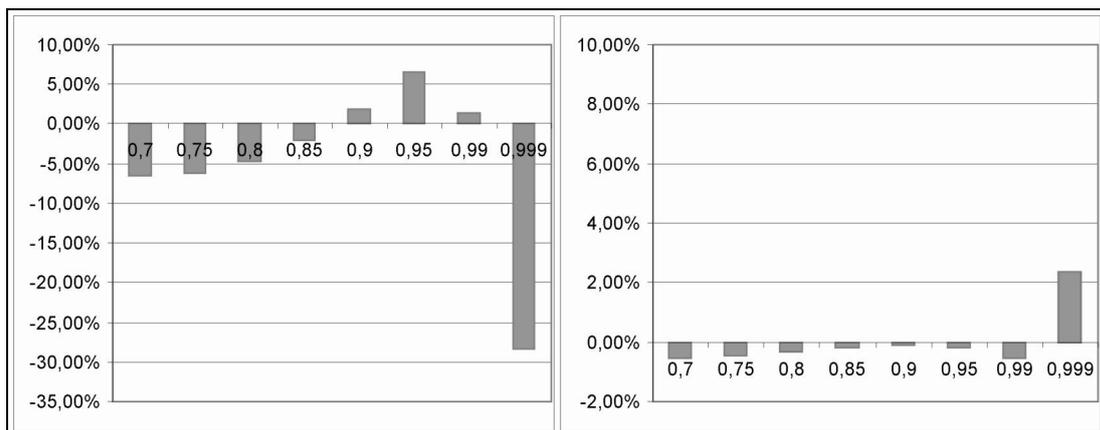


Abb. 4.4

4.5 Einordnung der Verteilungsklasse in die Extremwerttheorie

In der Studie von *Dutta/ Perry* (2006) gibt es signifikante Unterschiede bei Anwendung des POT-Modells im Vergleich zu der Verwendung der GH-Verteilung für die Verlusthöhen.⁹⁴ Die Autoren sehen darin einen Beleg, dass die GH-Verteilung die Datenbasis besser approximiert als das POT-Modell. *Degen/ Embrechts/ Lambrigger* (2006) demonstrierten daraufhin, worauf solche Diskrepanzen beruhen können. Es wird gezeigt, dass für $g, h > 0$ die GH-Verteilung ein regulär varrierendes Verteilungsende mit Tail-Index $\alpha = 1/h$ besitzt. Die zugrunde liegende langsam varrierende Funktion L_{var} entspricht bei Vernachlässigung der Konstanten etwa der Form $\exp(\sqrt{\log(x)})/\sqrt{\log(x)}$. Diese Form der langsam varrierenden Funktion stellt sich im Bezug auf die Konvergenz der Exzessverteilung F_u an die GPD-Verteilung $G_{\xi, \beta}$ als problematisch dar. Da die GH-Verteilung im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung liegt, formal $F \in MDA(H_\xi)$ mit $\xi = h$, gilt für diese Verteilungsfamilie zwar das Pickands/ Balkema/ de Haan-Theorem, die Konvergenz verläuft jedoch sehr langsam. Dies kann durch die Reguläre Variation 2. Ordnung der langsam varrierenden Funktion L_{var} gezeigt werden. Die Konvergenzrate von

$$(4.20) \quad d(u) = \sup_{0 < y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)|$$

gegen 0 für $u \rightarrow x_F$, ist für die GH-Verteilung durch

$$(4.21) \quad d(u) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log(u)}}\right)$$

gegeben. Dies ist eine sehr geringe Konvergenzrate im Vergleich zur Standard-Normalverteilung und zur Log-Normalverteilung, die eine Konvergenz von $O(1/u^2)$ respektive $O(1/\log(u))$ aufweisen.

Als zentrales Resultat kann gefolgert werden, dass bei guter Modellierung des Datensatzes durch die GH-Verteilung, die Quantilschätzung durch das POT-Modell nur sehr langsam konvergiert. Das Verhalten 2. Ordnung der langsam varrierenden Funktion L_{var} bestimmt maßgeblich die Diskrepanz beider Ansätze.⁹⁵

⁹⁴ Vgl. *Dutta/ Perry* 2006, bei Verwendung des POT-Modells erhalten die Autoren extrem hohe VaR-Werte.

⁹⁵ Vgl. *Degen/ Embrechts/ Lambrigger* 2006, S. 14 u. S. 18.

5 Anwendung des LDA auf operationelle Verluste von Versicherungen

5.1 Modellierung der Verlusthäufigkeit

Zur Modellierung der Verlusthäufigkeit wird üblicherweise auf Basis eines Poissonprozesses die Zählverteilung $P_n(t)$ durch eine Poissonverteilung gem. (2.4) dargestellt. Zur Bestimmung des Risikokapitals wird ein Zeithorizont von einem Jahr angenommen, womit $t = 1$ gilt. Der Parameter λ lässt sich durch die mittlere Verlustzahl $E[N(1)]$ einer Periode der Länge 1 bestimmen.

Da der SAS Datensatz aus gepoolten Daten besteht, und so nicht auf ein Unternehmen zugeschnitten ist, muss zur Ermittlung des Parameters λ auf eine mittlere Verlusthäufigkeit eines Durchschnittsunternehmens zurückgegriffen werden. So wird die Gesamtanzahl der operationellen Risiken N_T über einen Zeithorizont durch die Anzahl der Unternehmen $N_{Unt.}$ geteilt, die Daten in diesem Zeitraum geliefert haben. Zudem wird durch die Jahresanzahl des Betrachtungszeitraums (T) dividiert, um eine Jahresgröße zu erhalten. Somit ergibt sich folgender Schätzer für λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{N_T}{N_{Unt.} \cdot T}.$$

Um ein durchschnittliches λ zu ermitteln wurde ein 10-Jahreszeitraum von 1998 bis 2007 zugrunde gelegt. In diesem Zeitraum sind $N_T = 1088$ operationelle Verluste von Versicherungsunternehmen vorhanden, welche von $N_{Unt.} = 635$ Unternehmen stammen. Somit ergibt sich als Schätzer für die Intensität $\hat{\lambda} = 0,171$.

5.2 Modellierung der Verlusthöhen

5.2.1 Peaks-over-Threshold Methode

Im Rahmen der Bias-Varianz-Bootstrapping Methode wird nun für den SAS-Versicherungsdatensatz ($n=1463$) die k -te Ordnungsstatistik gesucht, die den Bootstrap-Schätzer des mittleren quadratischen Fehlers des Parameters ξ minimiert. Für das Verfahren ist die Anzahl der gezogenen Bootstraps B und deren Umfang n_1 festzulegen. Die Anzahl B wird im Folgenden auf 100 festgesetzt, was zu akzeptablen Computerdurchlaufzeiten geführt hat. Nach *Danielsson et al.* (2001) sollte der Umfang n_1 so gewählt werden, dass $n_1 = n^{1-\varepsilon}$

gilt, wobei ein Wert für ε zwischen 0 und 0,5 Verwendung finden sollte.⁹⁶ Es sollte beachtet werden, dass gerade für ε -Werte nahe 0,5 der Umfang der Bootstraps ziemlich klein wird, was zu Verzerrungen führen kann. Bei der Umsetzung wurden drei verschiedene ε -Werte (0,1;0,25;0,4) verwendet, womit die mögliche Bandbreite gut abgedeckt sein dürfte.

Für den zentralen Wert $\varepsilon = 0,25$ resultiert ein Bootstrap-Umfang von $n_1 = 237$, was zugleich gemäß der Beziehung $n_2 = (n_1)^2 / n$ den Umfang n_2 determiniert ($n_2 = 38$). Nach Ziehung von $n_1 = 237$ Bootstraps wird für jedes $k = 1, \dots, n_1$ der Bootstrap-Schätzer des Mittleren Quadratischen Fehlers $Q(n_1, k_1)$ berechnet. Dabei ist diejenige k -te Ordnungsstatistik optimal, die $Q(n_1, k_1)$ minimiert.⁹⁷

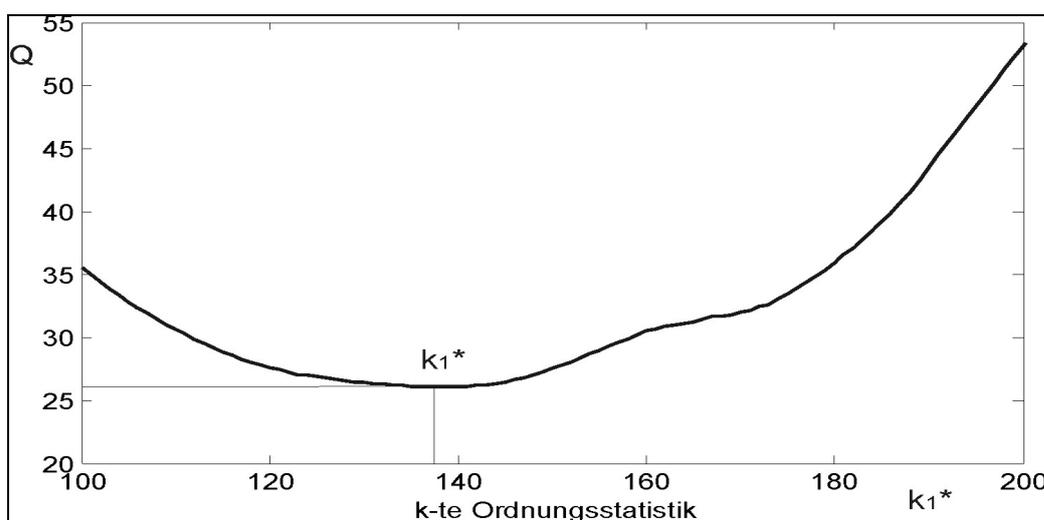


Abb. 5.1

In Abbildung 5.1 ist gut zu erkennen, dass für steigende k -Werte Q schnell abnimmt, und für $k_1 = 139$ ein Minimum gefunden wird. Für den Durchlauf mit kleinerem Bootstrap-Umfang $n_2 = 38$ resultiert $k_2^* = 21$ entsprechend. Über die Beziehung (3.27) lässt sich schließlich die optimale Ordnungsstatistik k_0 erzeugen. Bei diesem Durchlauf scheint $k_0 = 886$ optimal zu sein, womit die Schwelle beim zugrunde liegenden SAS-Datensatz auf 3,12 Mio. zu setzen wäre. Eine Übersicht der Ergebnisse inklusive der Parameterfestlegung von $\varepsilon = 0,1$ und $\varepsilon = 0,4$ findet sich in Tabelle 5.1 wieder.

⁹⁶ Vgl. Danielsson et al. 2001, S. 231 f.

⁹⁷ Vgl. dazu Kapitel 3.4.1; Danielsson et al. 2001, S. 230.

ε	0,25	0,1	0,4
n_1	237	706	79
n_2	38	341	4
$k_1^*(Q)$	139 (26,03)	424 (25,39)	45 (28,17)
$k_2^*(Q)$	21 (31,75)	205 (25,64)	2 (159,06)
k_0^*	886	856	901
$(Q(k_1))^2 / Q(k_2)$	21,34	25,14	6,63
Schwelle (Mio. €)	3,12	3,5	3,00

Tabelle 5.1

Die Entwicklung des Formparameters für verschiedene Schwellenhöhen wird in Abbildung 5.2 aufgezeigt, wobei auch das 95%-Konfidenzband eingezeichnet ist. Im Bereich der Exzedentenanzahl von 600 bis etwa 900 ändert sich der Parameter kaum und auch der Standardfehler ist im Vergleich zu Schwellen mit geringerer Exzedentenanzahl deutlich geringerer.

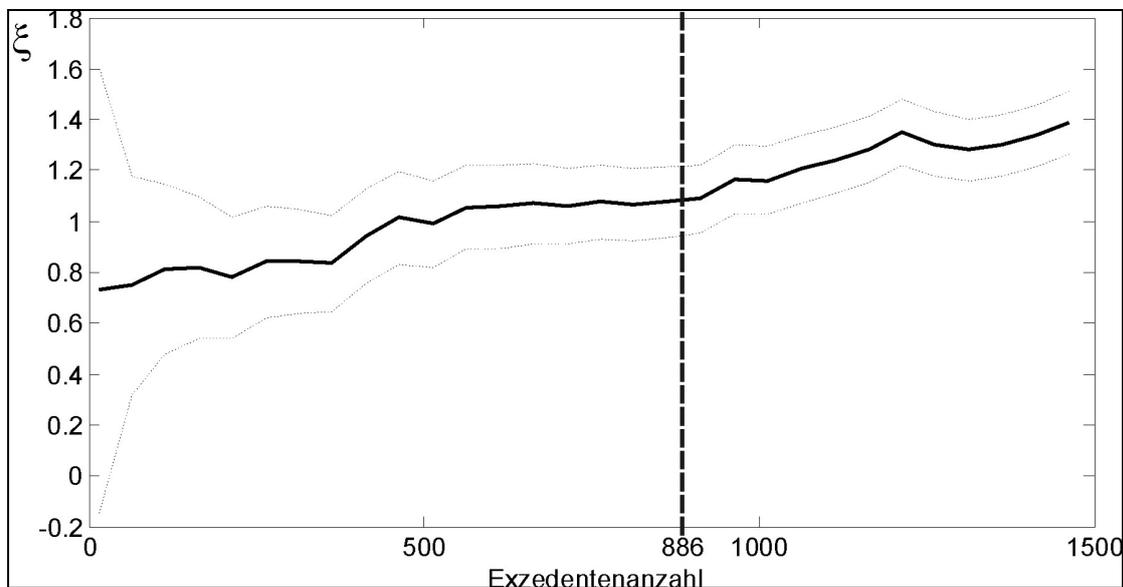


Abb. 5.2

Als Resultat dieses Verfahrens sollte eine sehr gute Anpassung der Exzessverteilung des Datensatzes durch die Verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD) erfolgen. Für den Durchlauf mit $\varepsilon = 0,25$ soll im Folgenden die graphische Anpassungsgüte bei Wahl der Schwelle $u = 3,12$ Mio. genauer untersucht werden. Die entsprechenden Parameterschätzungen finden sich in Tabelle 5.2 wieder.

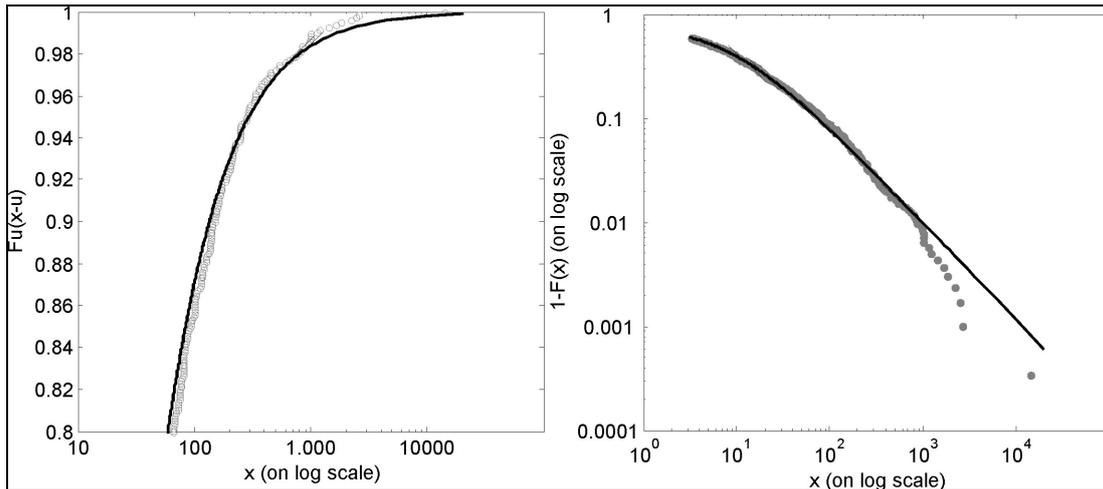


Abb. 5.3

Es fällt auf, dass die Exzessverteilung bei einer Schwelle von $u = 3,12$ Mio. gut durch die entsprechende GPD-Verteilung approximiert wird. Jedoch bei höheren Verlusthöhen (ab etwa 1 Mrd. €) gibt es doch größere Abweichungen, wobei die theoretische Verteilungsflanke dann oberhalb der empirischen Datenbasis verläuft. Dies hat zur Folge, dass die theoretische Verteilungsflanke die Gefährlichkeit der Datenbasis überschätzt, da die Wahrscheinlichkeit des Eintritts hoher Verlusthöhen durch die theoretische Verteilungsflanke zu hoch eingestuft wird.

Zur Bestimmung einer optimalen Schwelle kann auch der Mean-Excess-Plot aus Kapitel 3.4.2 herangezogen werden. Dieses Verfahren beruht darauf, dass die Funktion des bedingten erwarteten Exzesses aus (3.29) linear in der steigenden Schwelle z verlaufen sollte, wenn das Verteilungsende F_u hinreichend gut durch eine GPD-Verteilung approximiert werden kann.

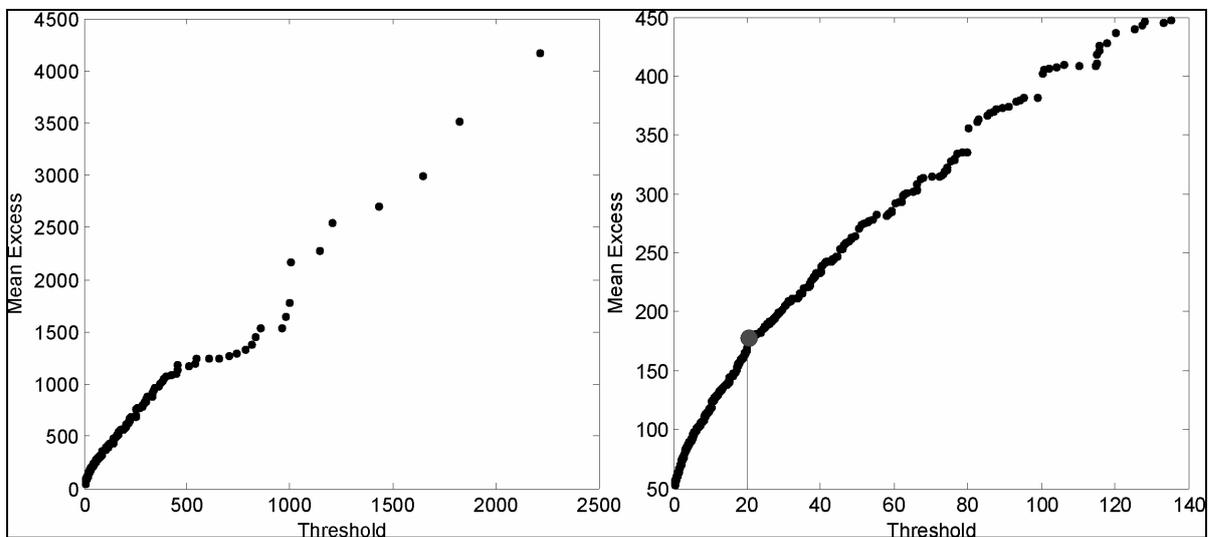


Abb. 5.4

Somit besteht die Aufgabe im Auffinden eines linearen Teilstücks des Mean-Excess-Plots. Für den Mean-Excess-Plots des SAS-Datensatzes in Abbildung 5.4 ist ein lineares Ansteigen der Funktion schon ab sehr geringen Schwellenhöhen zu verzeichnen. Dies würde aber gegen die Modelleigenschaft verstoßen, die eine hinreichend große Schwelle fordert. Daher empfiehlt es sich, einen verkleinerten Ausschnitt zu betrachten, indem die höchsten erwarteten Exzesse $e(z)$ ab einer gewissen Schwelle z einfach ausgelassen werden.⁹⁸

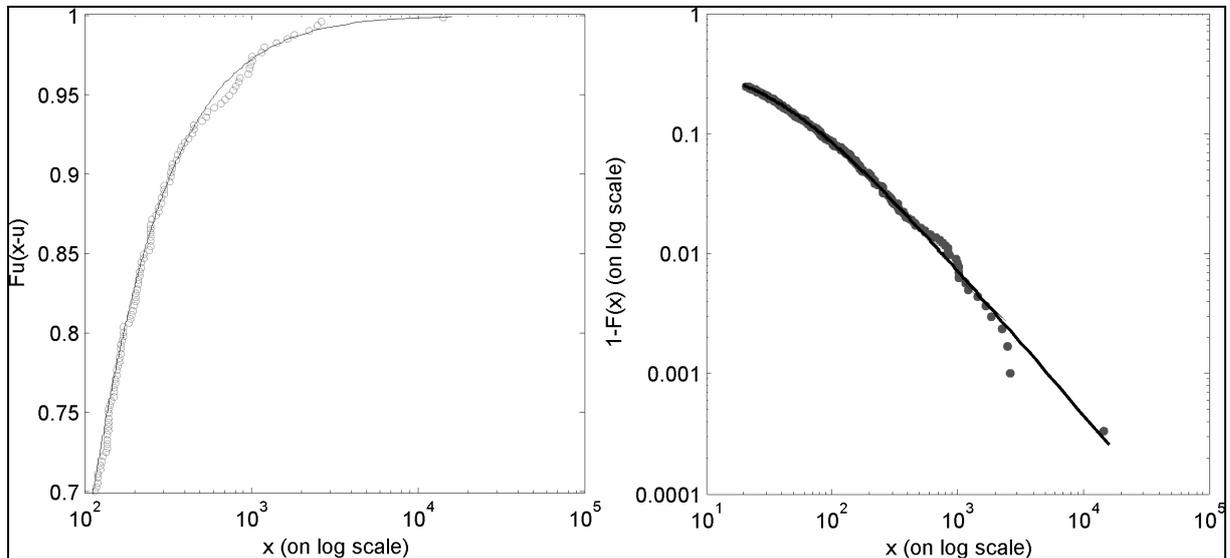


Abb. 5.5

Bei $u = 20$ Mio. € ist eine Knickstelle zu beobachten, ab dem der lineare Verlauf mit geringerer Steigung fortgesetzt wird. Somit stellt $u = 20$ Mio. € eine geeignete Lösung dieser graphischen Variante dar. Die geschätzten Verteilungsparameter für die GPD-Verteilung ab der Schwelle $u = 3,7$ Mio. € (Bootstrap-Verfahren) und $u = 20$ Mio. € (ME-Plot) können aus Tabelle 5.2 entnommen werden.

	$u=3,12$ Mio.		$u=20$ Mio.	
$\xi [se]$	1,0755	[0,07]	0,824	[0,0948]
$\beta [se]$	12,988	[0,89]	45,253	[4,49]
log likelihood	-4106		-2085,4	
Exzedentenanzahl	885		370	
Quantil der Schwelle	0,395		0,7471	

Tabelle 5.2

⁹⁸ In der rechten Graphik in Abbildung 5.4 wurde dies so gelöst, dass die größten 100 Datenpunkte weggelassen wurden.

Die Approximation der bedingten Exzessverteilung und des Verteilungsendes durch die geschätzte GPD-Verteilung in Abbildung 5.5 verläuft vor allem im Extrembereich bei der Mean-Excess-Plot-Methode viel besser als die Approximation ab der Schwelle $u = 3,12$ Mio. € die aus dem Bootstrap-Verfahren abgeleitet wurde.

Um noch Vergleichsmaßstäbe im Hinblick auf die erzeugten optimalen Schwellenhöhen aus den vorherigen Kapiteln zu erhalten, werden ad hoc weitere Schwellen generiert. Dabei wird auch das Ad hoc-Kriterium verwendet, das eine Schwelle auf Höhe des 85%-Quantils der empirischen Verteilung vorsieht.⁹⁹ Des Weiteren wurden Schwellen beim 80%-Quantil (31,7 Mio. €) und beim 90%-Quantil (79,5 Mio. €) gesetzt. Ferner wurde eine Schwelle bei 10 Mio. € gesetzt, um einen Vergleichsmaßstab zu den Ergebnissen der anderen Methoden zu erhalten. Die Approximation der Verteilungsenden durch die jeweilige geschätzte GPD-Verteilung für die genannten Schwellen ist in Abbildung 5.6 ersichtlich.

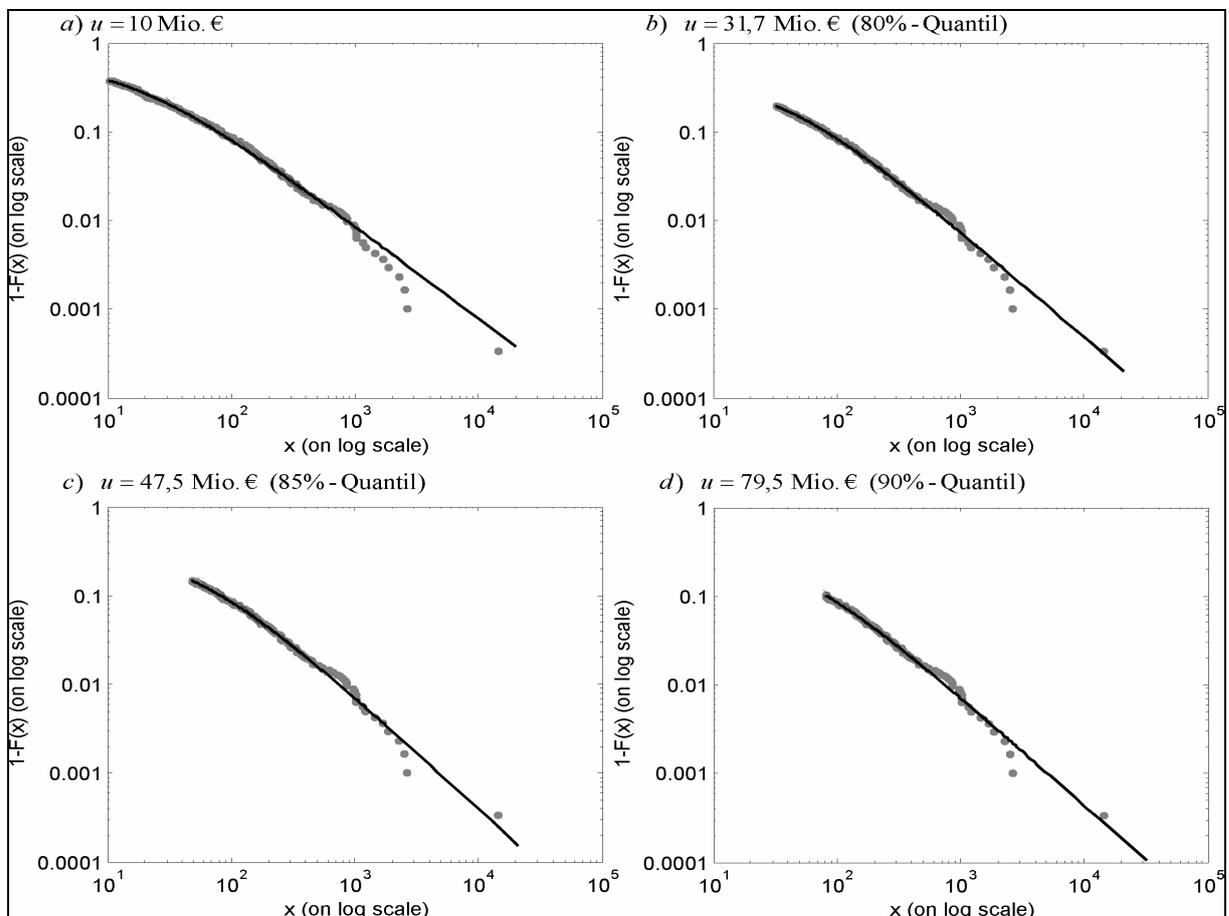


Abb. 5.6

⁹⁹ Vgl. Dutta/ Perry 2006, S. 29; die Anpassung mit Schwelle auf Höhe des 85%-Quantils ist in Abbildung 5.6 c) ersichtlich.

Bei einer Schwellensetzung von $u = 10$ Mio. € erhält man ein ähnliches Ergebnis wie bei der Schwellensetzung anhand des Bootstrap-Verfahrens.¹⁰⁰ Die theoretische Verteilungsflanke verläuft oberhalb der Datenbasis und überschätzt somit die Gefährlichkeit. Bei Festlegung der Schwelle in Höhe des 80%, 85% und 90% erhält man sehr ähnliche Ergebnisse, die sich auch nicht wesentlich von der Anpassung mit Hilfe des ME-Plots unterscheiden.

5.2.2 GH-Verteilung

Zu Zwecken der explorativen Datenanalyse des SAS OpRisk Insurance-Datensatzes wird in Abbildung 5.7 die Mid-Summary und die Pseudo-Sigma-Statistik für die Quantilhöhen $\alpha = 1/4, 1/8, 1/16, \dots$ gebildet. Dabei weisen beide Statistiken höhere Werte auf, je kleiner α gewählt wird. Dies lässt auf eine rechtsschiefe leptokurtische Verteilung der Schadenhöhen schließen.

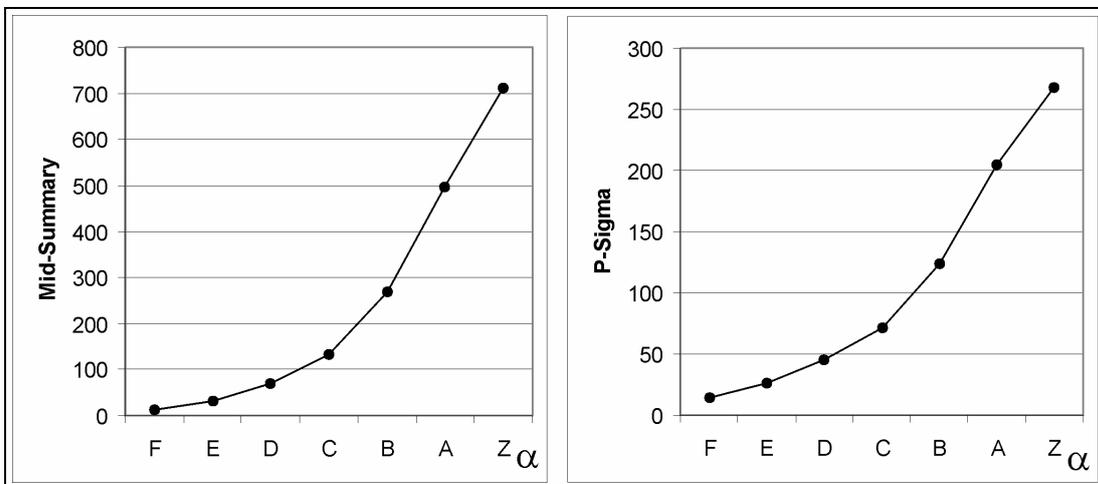


Abb. 5.7

Zur Schätzung des Parameters g werden für die obige Quantilsequenz die g_α -Werte gemäß Gleichung (4.13) bestimmt. Zur Beurteilung, ob ein konstanter g -Parameter oder ein Polynom in Z^2 verwendet werden sollte, ist es zweckgemäß, die g_α -Werte gegen die zugehörigen quadrierten α -Quantile der Standardnormalverteilung abzutragen. Für den SAS-Datensatz ist dies in Abbildung 5.8 ersichtlich. Dabei befinden sich die g_α -Werte für verschiedene α -Quantile auf sehr stabilem Niveau. Somit sollte ein konstanter g -Parameter ausreichen. Eine Parametrisierung gem. (4.16) liefert lediglich ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,1342$. Bei

¹⁰⁰ Vgl. Abbildung 5.3.

unkonstantem Verlauf wäre eine lineare oder eine Anpassung höheren Grades nötig gewesen.

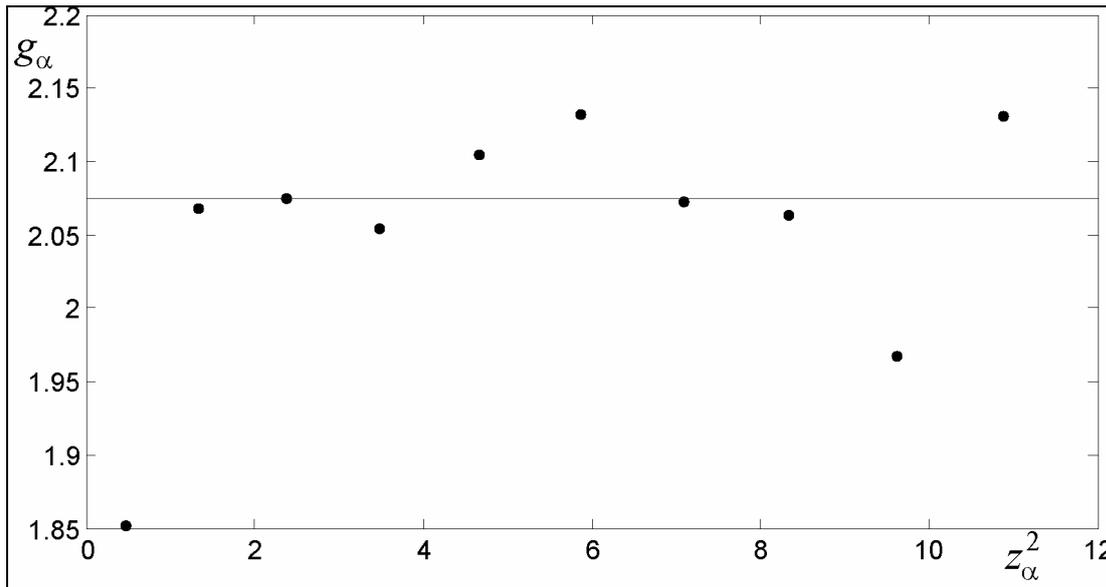


Abb. 5.8

Der Parameter g bestimmt sich aus dem Median der g_α -Werte, so dass für den betrachteten Datensatz $g = 2,072$ eine gute Schätzung darstellt. Zur Parameterbestimmung von h muss immer das Ergebnis der Schätzung für g zugrunde gelegt werden, da dieses in den adjustierten upper half-spread aus Gleichung (4.15a) Einfluss nimmt. Im Folgenden wird eine Regression von $\ln(UHS_\alpha^*)$ auf z_α^2 vorgenommen. Die Konstante in der Regression entspricht dabei $\ln(b)$ und die Steigung der Regressionsgeraden gleicht \bar{h}_0 , womit sich h_0 durch die Beziehung $h_0 = 2\bar{h}_0$ bestimmen lässt. Der Anstieg in z_α^2 gibt Anlass, den Parameter h auch als Polynom in z^2 darzustellen. Dafür wird die Regression auf z_α^2 und z_α^4 durchgeführt, wobei der konstante Term wiederum $\ln(b)$ entspricht. Aus der erfolgten Regression in Abbildung 5.9 folgt $\bar{h}_0 = 0,03$ und $\bar{h}_2 = -0,00093$. Durch Verdoppelung der Werte erhält man die gesuchten Parameter h_0 und h_2 , welche der Tabelle 5.3 entnommen werden können.

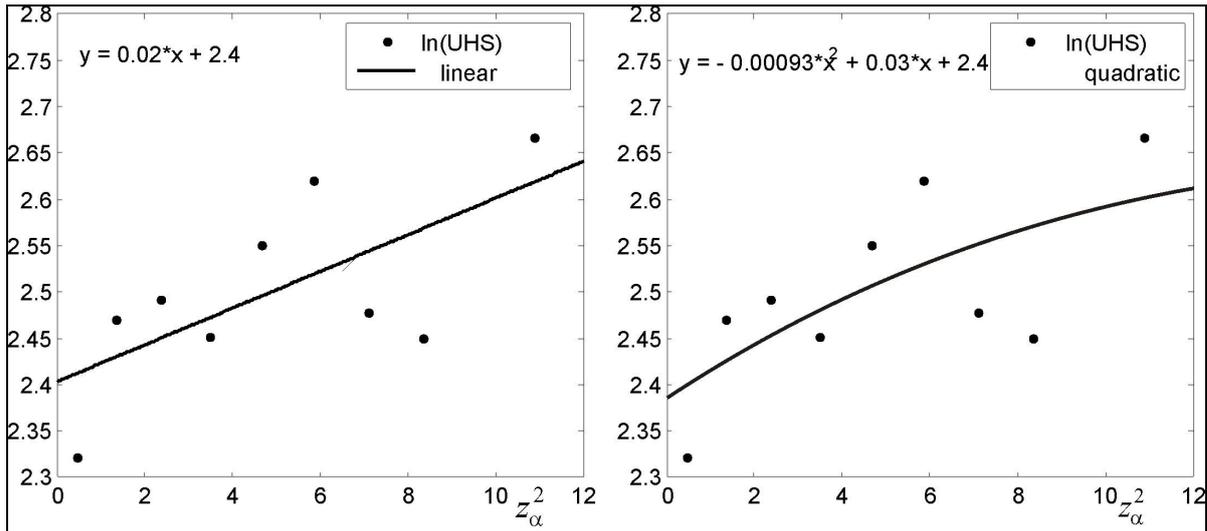


Abb. 5.9

Polynom \	g	a	b	h0	h2	R2
linear	2,072	5,8	11,02	0,04	-----	0,45
quadratisch	2,072	5,8	10,91	0,06	-0,0019	0,46

Tabelle 5.3

Zur Beurteilung, ob nun ein oder zwei h -Parameter verwendet werden sollten, kann die Anpassungsgüte an die empirische Verteilungsflanke, wie in Abbildung 5.10 dargestellt, betrachtet werden. Dabei ist kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Modell mit einem h -Parameter und dem Modell mit Polynom 2. Grades zu erkennen.

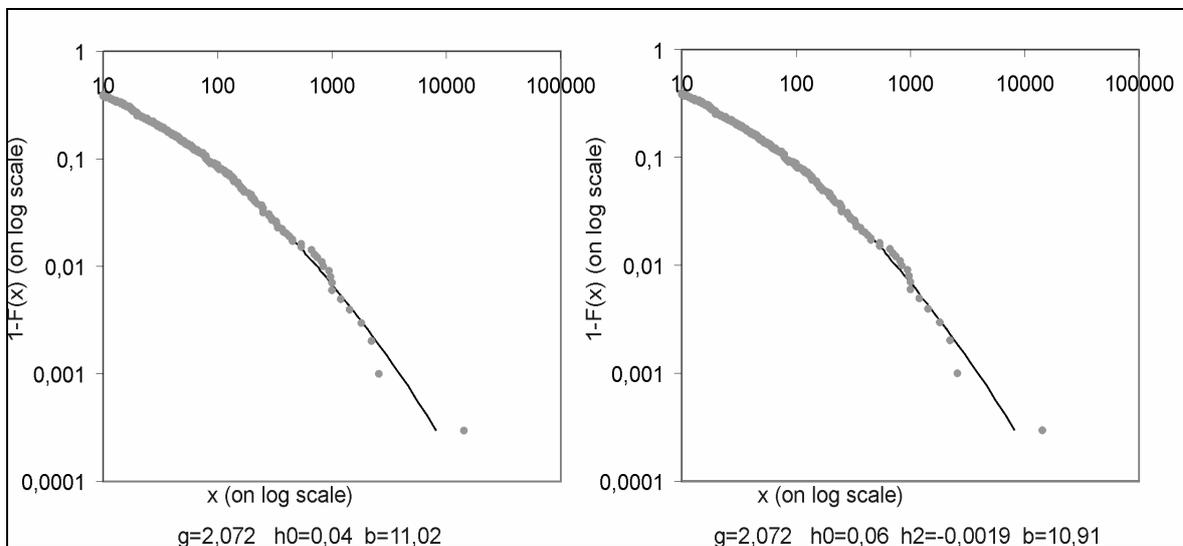


Abb. 5.10

Die prozentuale Diskrepanz zwischen den ausgewählten Quantile der empirischen Verteilung und dem zugrunde liegenden GH-Modell wird in Abbildung 5.11 abgetragen. Auch hier wird das graphische Ergebnis aus Abbildung 5.10 bestärkt, wobei das Modell mit Polynomverwendung leicht besser abschneidet. Der Unterschied zwischen beiden Modellen ist jedoch marginal.

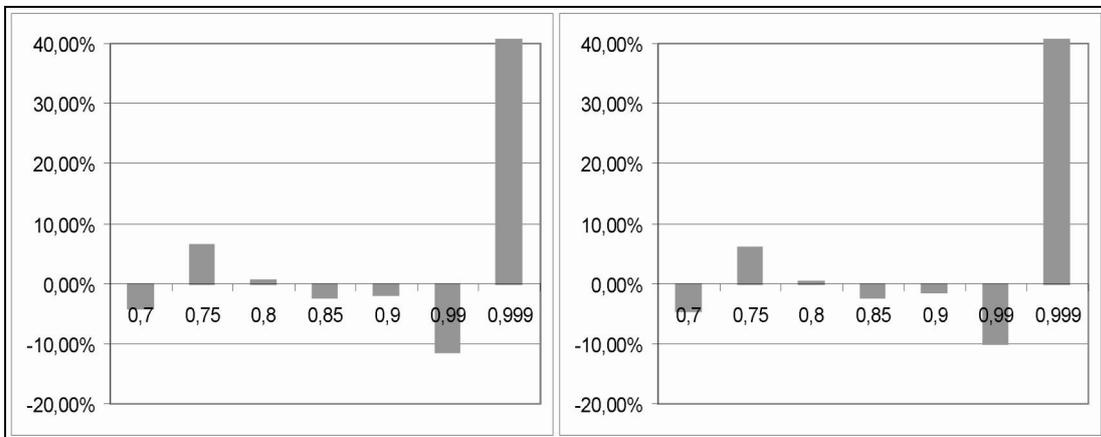


Abb. 5.11 Modell ohne Polynomverwendung: links, Modell mit Polynomverwendung: rechts.

Der Parameternaufwand bei Polynomverwendung dürfte im Vergleich zum Nutzen zu hoch sein, so dass für die Simulation im nächsten Kapitel das Modell mit einem g - und einem h -Parameter verwendet wird. Für das POT-Modell und das GH-Verteilungsmodell wird die Anpassung an den empirischen Datensatz vergleichsweise in Abbildung 5.12 dargestellt. Dabei fällt auf, dass das GH-Modell das 99,9%-Quantil besser als das POT-Modell approximiert. Dafür sind bei dem POT-Modell auch extreme Verluste möglich, was dem Endpunkt der empirischen Verteilung besser gerecht wird.

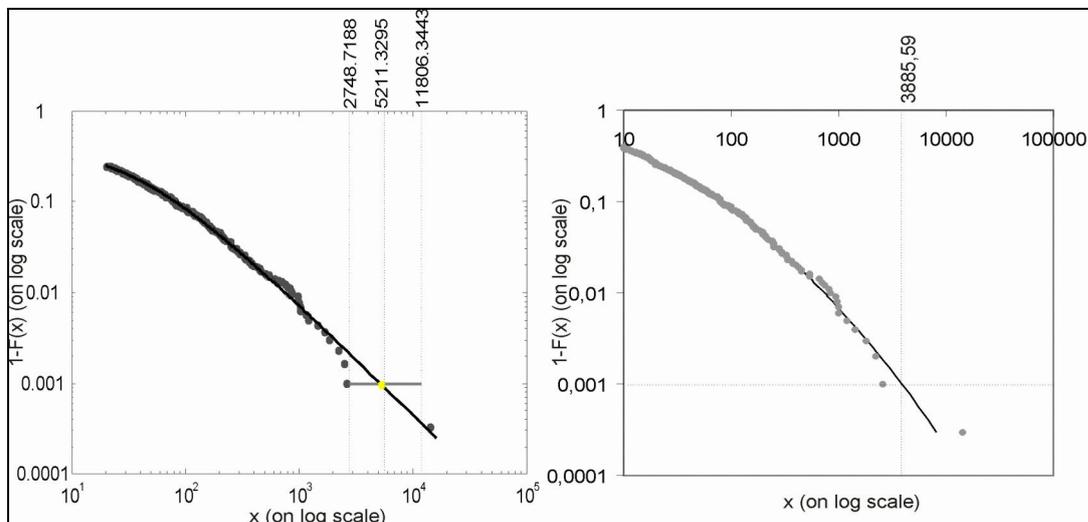


Abb. 5.12 links: EVT rechts: G-und-H

5.3 Simulationsdurchführung

5.3.1 Besonderheit bei Verwendung des POT-Modells

Bei Verwendung des POT-Modells sind die Schadenhöhen nur ab der Schwelle u schätzbar, was zu einer Teilung der Schadenhöhenverteilung in einen unteren und oberen Bereich führt. Die Dichtefunktion f der Verlusthöhenverteilung lässt sich über das Splicing-Verfahren somit als Kombination zweier Dichtefunktionen f_L und f_H wie folgt darstellen:

$$f = \alpha f_L + (1 - \alpha) f_H. \text{ }^{101}$$

Der Aufteilungsparameter α bestimmt sich durch den Anteil der Verlustereignisse im Body-Bereich an allen Verlustereignissen. Für den Body-Bereich wird keine parametrische Verteilung angepasst, sondern die empirische Verteilung der Verlusthöhen bis zur Schwelle $u = 20$ Mio. € zugrunde gelegt. Ab der Schwelle hingegen wird die GPD-Verteilung aus Kapitel 5.2.1 verwendet. Für den zugrunde liegenden Datensatz bestimmt sich $\alpha = 0,747$ durch das Verhältnis der 1093 Verluste im Body-Bereich zu der Gesamtverlustanzahl 1463.

Bei Durchführung der Monte-Carlo-Simulation wird standardmäßig für jeden Simulationsschritt zunächst die Schadenhäufigkeit N aus der Poissonverteilung $Poi(\lambda = 0,171)$ gezogen. Die Teilung der Verlusthöhenverteilung wird daraufhin so berücksichtigt, indem je nach Anteil α die gezogene Schadenhäufigkeit N in die Anzahl N_L an Verlusten aus dem Body-Bereich und eine entsprechende Anzahl N_H aus dem Tail-Bereich aufgeteilt wird. Folglich sind N_L Verluste aus der empirischen Verteilung bis zur Schwelle $u = 20$ Mio. und N_H Verluste aus der GPD-Verteilung zu ziehen. Durch Aufsummierung aller Verluste erhält man schließlich einen simulierten operationellen Verlust für die betrachtete Periode.¹⁰² Dieser Algorithmus wird nun sehr häufig wiederholt ($N_{MC} = 1\text{Mio.}$), so dass die resultierende simulierte Verlustverteilung geringe Schätzungenauigkeiten aufweist.

5.3.2 Simulationsergebnisse

Für die zwei verwendeten Verlusthöhenmodelle wird der Loss Distribution Approach durchgeführt und hohe Quantile der resultierenden Gesamtverlustverteilung in Tabelle 5.4 abgetra-

¹⁰¹ Vgl. Nguyen/ Ottmann 2005, S. 45; Klugman/ Panjer/ Willmot 2004, S. 64.

¹⁰² Vgl. Dutta/ Perry 2006, S. 28.

gen. Demgegenüber wird der auf dem „one-claim-causes-ruin“-Paradigma basierende empirische Quantilschätzer gem. Formel (2.29) berechnet.

Quantil	GH-Verteilung	POT-Modell	empirischer Schätzer
0,95	16,86	44,43	17,02
0,96	24,74	54,00	24,00
0,97	38,49	68,94	38,00
0,98	65,86	96,98	67,00
0,99	146,51	173,97	150,00
0,995	293,79	311,04	286,00
0,999	1.158,80	1.138,20	1.085,73

Tabelle 5.4

Es ist gut zu erkennen, dass der empirische Schätzer dem Modell mit der GH-Verteilung sehr nahe kommt. Für die Quantilhöhe 99,5%, die für interne Modelle in Solvency II vorgesehen ist, ist die Kapitalunterlegungsanforderung für das POT-Modell mit 311,04 Mio. € am höchsten. Das Bild dreht sich jedoch für das 99,9%-Quantil der Gesamtverlustverteilung um. Hier ist die Kapitalanforderung für die GH-Verteilung am höchsten. Dies überrascht ein wenig, da die Verlusthöhenverteilung auf Basis des POT-Modells einen ausgeprägteren Rand aufweist als die GH-Verteilung. Die Diskrepanz resultiert aus der besonderen Simulationdurchführung des Splicing-Verfahrens für das POT-Modell. Hier wurde für den Body-Bereich die empirische Verteilung anstatt einer parametrischen Verteilung verwendet.

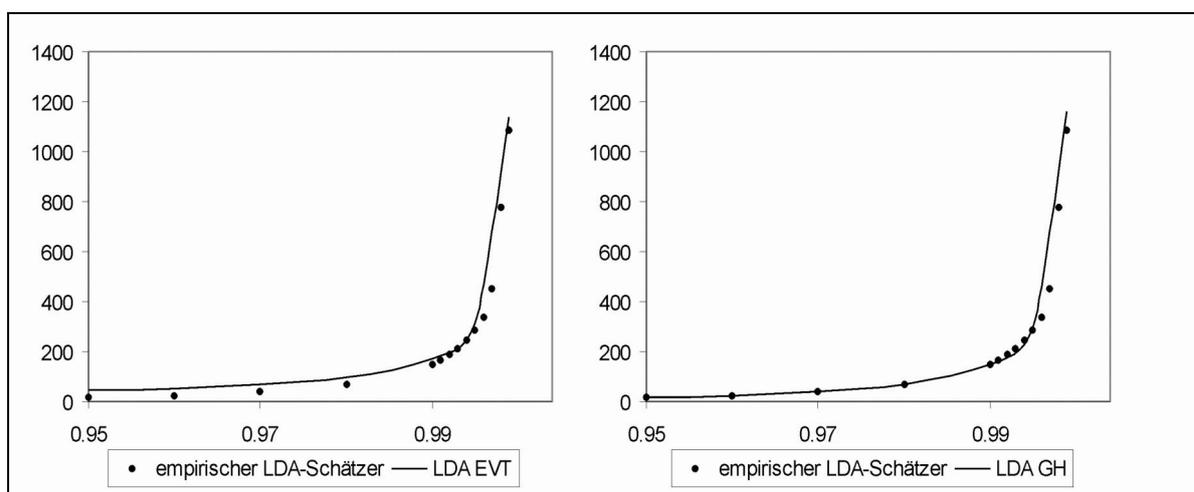


Abb. 5.13

Des Weiteren werden die Auswirkungen eines Versicherungsvertrags, der eine Erstattung von Einzelschäden ab einer Verlusthöhe von $d = 500$ Mio. € bis zu einem Maximalbetrag von $m = 1.500$ Mio. € vorsieht, analysiert. Der Haftungslayer ist gerade so gewählt, dass das

99,9%-Quantil abgedeckt wird. Durch eine MC-Simulation für das GH-Modell kann gezeigt werden, dass das 99,9%-Quantil auf den Selbstbetrag von 500 Mio. € gesenkt werden kann. Dies ist eine beachtliche Reduktion von 658,80 Mio. €. Wenn man jedoch die Versicherungsrestriktion des Basel II-Regelwerks übernimmt, die eine maximale Erleichterung von 20% der geforderten Kapitalunterlegung durch eine Versicherungsvertrag gestattet, dann reduziert sich das 99,9%-Quantil auf 927,04 Mio. €¹⁰³ Der Erstattungsbetrag, den der Kontraktpartner des Versicherungsvertrags begleichen muss, liegt im Erwartungswert lediglich bei 1,57 Mio. €. Durch das Beispiel ist gut zu erkennen, dass sich die Kapitalunterlegung durch einen geschickt gewählten Versicherungsvertrag drastisch senken lässt. Auf der anderen Seite dürften die Prämien für den Kontrakt moderat bleiben, wenn der Kontraktpartner Kollektivausgleichseffekte ausnutzt, indem er mehrere Verträge abschließt. Die Auswirkung auf die Verlustquantile durch die Versicherungslösung wird in Tabelle 5.5 und graphisch in Abbildung 5.14 aufgezeigt.

Quantil	GH-Verteilung (ohne Versicherung)	mit Versicherung (ohne Basel-Restriktion)	mit Versicherung (mit Basel-Restriktion)
0,99	146,51	146,51	146,51
0,995	293,79	293,79	293,79
0,996	360,58	360,58	360,58
0,997	462,58	462,58	462,58
0,998	664,87	500,00	531,90
0,999	1.158,80	500,00	927,04

Tabelle 5.5

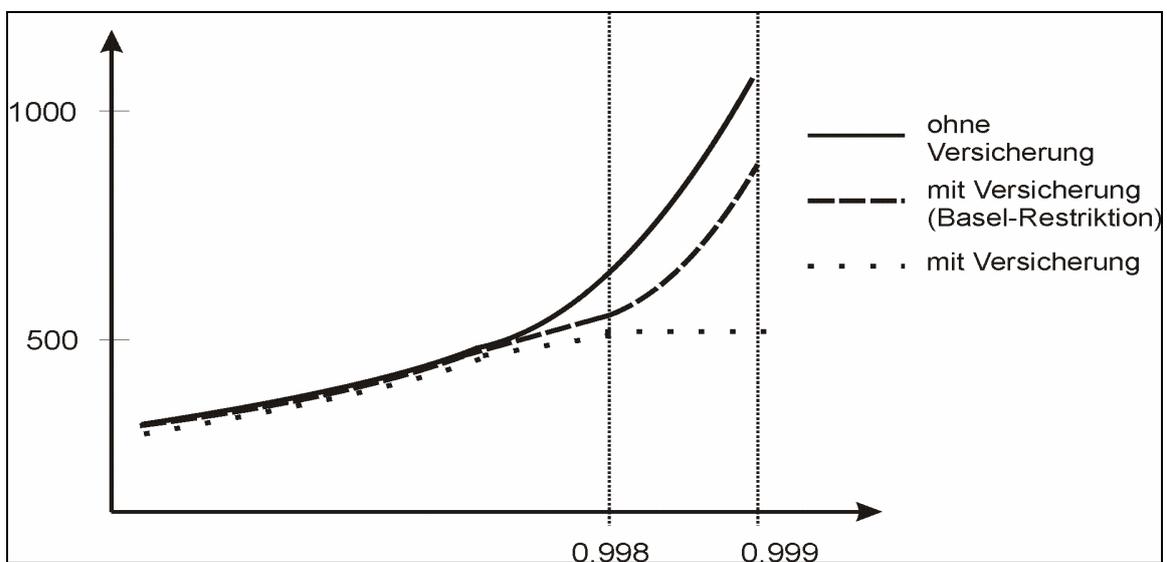


Abb. 5.14

¹⁰³ Vgl. Basel Committee on Banking Supervision 2004, S. 148, Par. 677.

6 Schlussbetrachtung

Im Fokus dieser Arbeit standen die verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten der Verlusthöhenverteilung im Loss Distribution Approach. Hier wurde einerseits die Verlusthöhe auf Basis der Extremwerttheorie modelliert, wobei insbesondere die Schwellenwertfestlegung Probleme bereitet. Auf Basis der SAS OpRisk Global Data Insurance-Daten konnte gezeigt werden, dass die Bias-Varianz-Bootstrap Methode von Danielsson et al. (2001) zur Schwellenwertfestlegung keine zufrieden stellende Anpassung im Extrembereich liefern konnte. Der ME-Plot hilft dagegen eher, eine geeignete Schwelle zu finden. Jedoch ist die Wahl der Schwelle sehr subjektiv, so dass auch hier Vorsicht geboten ist. Bei ausreichender Datengrundlage sollte eine ad-hoc-Schwellenfestlegung, z.B. auf das 90%-Quantil, die beste Wahl sein. Die Schwelle ist dann nämlich hinreichend hoch und es befinden sich genügend Datenpunkte über der Schwelle.

Die GH-Verteilung ist leicht auf den SAS Datensatz implementierbar. Dabei fiel der Parameter g mit einem Wert von deutlich über 2 hoch aus. Der Parameter h für die Kurtosis war dagegen nur schwach positiv. Ein parametrisches Modell, das eine Abhängigkeit der Parameter von den quadrierten Quantilwerte der Standardnormalverteilung Z^2 erlaubt, war nicht erforderlich.

Die Gesamtverlustverteilung wurde zum einen mit einer gesplitten Verlusthöhenverteilung simuliert, wobei ab einer Schwelle die Verlusthöhenverteilung mit Hilfe der Verallgemeinerten Paretoverteilung berechnet wird. Zum anderen wurde die angepasste GH-Verteilung verwendet. Beide Simulationen führten zu ähnlichen Ergebnissen. In Höhe des 99,9%-Quantils gab es bei Verwendung der GH-Verteilung ein leicht höheres Ergebnis als bei Verwendung der Methode auf Basis der Extremwerttheorie. Das „one-claim-causes-ruin“- Approximationsverfahren kam erstaunlich gut an beide Simulationsergebnisse heran.

Schließlich konnte gezeigt werden, dass ein geschickt gewählter Versicherungsvertrag, der operationelle Verluste kompensiert, deutlich zu einer Herabsetzung der Kapitalunterlegungserfordernis führen kann. Jedoch spielt hier der regulatorische Rahmen eine entscheidende Rolle, da z.B. nach Basel II eine Versicherungsleistung das notwendige Kapital ohne Versicherung nur um 20% reduzieren kann. Es ist wohl sehr wahrscheinlich, dass auch ein internes Modell im Rahmen von Solvency II nur eine beschränkte Versicherungsmöglichkeit vorsehen wird.

In dieser Arbeit wurde ein univariates Modell untersucht, um statistische Anpassungen darzustellen. Nach Basel II ist jedoch die Aufgliederung nach Risikozellen erforderlich. Ferner können Abhängigkeiten zwischen diesen Zellen berücksichtigt werden. In einer kommenden Arbeit werden verschiedene Geschäftsbereiche berücksichtigt und die Abhängigkeiten zwischen den Risikozellen mit Hilfe von Copulas berücksichtigt.

Literaturverzeichnis

- Albrecht, Peter; Raimond Maurer; Matthias Möller (Albrecht/Maurer/Möller 1998): Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle: Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip, in: Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 118. Jg., Heft 2, 1998, S. 249 – 274.
- Albrecht, Peter (Albrecht 1994): Zur Konzeptualisierung von Risiko- und Chancenpotential mit Anwendungen in den Finanz- und Versicherungsmärkten, in: Hübner, U., E. Helten, P. Albrecht (Hrsg.): Recht und Ökonomie der Versicherung, Festschrift für Egon Lorenz, Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft 1994, S. 1 – 22.
- Albrecht, Peter (Albrecht 1993): Analyse der Zufallsgesetzmäßigkeit von Unterrenditen GBV 1993, Karlsruhe 1994, S. 585 – 602.
- Albrecht, Peter (Albrecht 1998): Risikoadjustierte Performancesteuerung in der Schadenversicherung, in: Oehler, A. (Hrsg.): Credit Risk und VaR-Alternativen, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 1998.
- Albrecht, Peter (Albrecht 2003): Zur Messung von Finanzrisiken, in: Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 143, Mannheim 2003.
- Albrecht, Peter; Edmund Schwake; Peter Winter (Albrecht/ Schwake/ Winter 2007): Quantifizierung operationeller Risiken: Der Loss Distribution Approach, in: German Risk and Insurance Review, 2007.
- Alfarano, S.; T. Lux (Alfarano/ Lux 2004): Extreme Value Theory as a Theoretical Background for Power Law Behavior, Working Paper Universität Kiel.
- Aue, F., M. Kalkbrenner (Aue/ Kalkbrenner 2006): LDA at work, Deutsche Bank.
- Auer, M. (Auer 2008): Operationelles Risikomanagement bei Finanzinstituten, Risiken identifizieren, analysieren und steuern, Wiley-VCH, Weinheim.

- Badrinath, S. G.; S. Chatterjee (Badrinath/ Chatterjee 1991): A Data-Analytic Look at Skewness and Elongation in Common-Stock-Return Distributions, in: *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 9, No. 2, 1991.
- Balkema, A. A.; L. de Haan (Balkema/ de Haan 1974): Residual lifetime at great age, in: *Annals of Probability*, 2, S. 792 – 804.
- Basel Committee on Banking Supervision (Basel 2001): *Operational Risk - Consultative Document*, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001.
- Basel Committee on Banking Supervision (Basel 2004): *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework*, June 2004.
- Bazzarello, D.; B. Crielaard; F. Piacenza; A. Soprano (Bazzarello et al. 2006): Modeling insurance mitigation on operational risk capital, in: *Journal of Operational Risk*, Vol. 1, No. 1, Spring 2006, pp. 57 – 65.
- Beirlant J.; P. Vynckier; J.L. Teugels (Beirlant/ Vynckier/ Teugels 1996): *Practical Analysis of Extreme Values*. University Press, Leuven, 1996.
- Böcker, K., C. Klüppelberg (Böcker/ Klüppelberg 2006): *Multivariate Models for Operational Risk*, TU München.
- Brandts, S. (Brandts 2004). *Operational risk and insurance: quantitative and qualitative aspects*, Working Paper.
- Bühlmann, H. (Bühlmann 1970): *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer, Berlin.
- Chapelle, A.; Y. Crama; G. Hübner; J.-P. Peters (Chapelle et al. 2004): *Basel II and Operational Risk: Implications for risk measurement and management in the financial sector*, National Bank of Belgium, Working Papers – Research Series.
- Chartis Research Ltd. (Chartis Research Ltd. 2008): *Operational Risk Management Systems 2008, Navigating through a fragmented market*.

- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS 2007): CEIOPS' Report on its third Quantitative Impact Study (QIS3) for Solvency II.
- Davison A.C.; R. L. Smith (Davison/ Smith 1990): Models for Exceedances over High Thresholds, in: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 52, No. 3., S. 393 – 442.
- De Fontnouvelle, P., E. Rosengren, J. Jordan (De Fontnouvelle/ Rosengren/ Jordan 2004): Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques, Federal Reserve Bank of Boston.
- Degen, M., P. Embrechts, D.D. Lambrigger (Degen et al. 2006): The Quantitative Modelling of Operational Risk: Between g- and -h and EVT, ETH Zürich.
- De Haan, L., D.W. Jansen, K.G. Koedijk, C.G. de Vries (De Haan et al. 1994): Safety first portfolio selection, extreme value theory and long run asset risks. In: Galambos, J., Lechner, J., Kluwer, E.S. (Eds.), *Extreme Value Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 471 – 488.
- Dekkers, A. L. M.; L. de Haan (Dekkers/ de Haan 1993): Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation, in: *Journal of Multivariate Analysis*, 47, No. 2, S. 173 - 195.
- Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J.; de Haan, L. (Dekkers/ Einmahl/ de Haan 1989): A moment estimator for the index of an extreme-value distribution, in: *Annals of Statistics*, 17, S. 1833 – 1855.
- Diebold, F.X., T. Schuermann, J.D. Stroughair (Diebold/ Schuermann/ Stroughair 2000): Pitfalls and Opportunities in the Use of Extrem Value Theory in Risk Management, in: Embrechts, P. (Hrsg.): *Extremes and Integrated Risk Management*, London, 51 – 57.
- Dölker, A. (2006): *Das operationelle Risiko in Versicherungsunternehmen*, Karlsruhe.

- Dutta, Kabir K.; David F. Babbel (Dutta/ Babbel 2002): On Measuring Skewness and Kurtosis in Short Rate Distributions: The Case of the US Dollar London Inter Bank Offer Rates, 2002, Wharton Financial Institutions Center Working Paper.
- Drees H.; E. Kaufmann (Drees/ Kaufmann 1998): Selecting the optimal sample fraction in univariate extreme value estimation, in: *Stochastic Processes and Their Applications*, 75, S. 149 – 172, 1998.
- Dutta, Kabir K.; Jason Perry (Dutta/ Perry 2006): A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital, Federal Reserve Bank of Boston, Working Paper No. 06-13.
- Efron, B; R. J. Tibshirani (Efron/ Tibshirani 1993): An introduction to the bootstrap. *Mono-graphs on Statistics and Applied Probability*, No. 57. Chapman and Hall, London.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch (Embrechts/ Klüppelberg/ Mikosch 1997): *Modelling Extremal Events*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Europäische Kommission (Europäische Kommission 2007): QIS4 Technical Specifications (MARKT/2505/08).
- Feller, W. (Feller 1971): *An introduction to probability theory and its applications*, 2. Band, Wiley, New York.
- Fischer, Matthias; Armin Horn; Ingo Klein (Fischer et al. 2003): Tukey-type distributions in the context of financial data, *Diskussionspapier* 52, 2003.
- Fisher, R. A.; L. H. C. Tippett (Fisher/ Tippett 1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, in: *Proceeding of Cambridge Philosophical Society*, 24, S. 180 – 190.
- Frachot, A., P. Georges, T. Roncalli (Frachot/ Georges/ Roncalli 2001): *Loss Distribution Approach for Operational Risk*, Credit Lyonnais.

- Frachot, A.; T. Roncalli; E. Salomon (Frachot/ Roncalli/ Salomon 2004): The Correlation Problem in Operational Risk, Crédit Agricole SA.
- Gencay, R.; F. Selcuk; A. Ulugülyagci (Gencay/ Selcuk/ Ulugülyagci 2002): EVIM: A Software Package for Extreme Value Analysis in MATLAB, working paper University of Windsor/ Bilkent University.
- Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV 2005): Diskussionsbeitrag für einen Solvency II kompatiblen Standardansatz (Säule I), Modellbeschreibung, Berlin.
- Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV 2007) : Operationelle Risiken unter Solvency II aus Sicht der Deutschen Versicherungswirtschaft und Versicherungsaufsicht, Berlin.
- Gnedenko, B. V. (Gnedenko 1943). Sur la distribution limite du terme d'une serie aleatoire, in: *Annals of Mathematics*, 44, S. 423– 453.
- Hall, P. (Hall 1982): On some simple estimates of an exponent of regular variation, in: *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 44, S. 37 – 42.
- Hall, P. (Hall 1990): Using the bootstrap to estimate mean squared error and select smoothing parameter in nonparametric problems, in: *Journal of Multivariate Analysis*, 32, S. 177 – 203, 1990.
- Hill, B. M. (Hill 1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. in: *Annals of Statistics*, 3, S. 1163 – 1174.
- Hoaglin, D. C. (Hoaglin 1985a): Using Quantiles to Study Shape, Chapter 10 in: *Exploring Data Tables Trends, and Shapes*. Eds. Hoaglin, Mosteller, and Tukey. New York, NY: John Willey, 1985.

- Hoaglin, D. C. (Hoaglin 1985b): Summarizing Shape Numerically: The g-and-h Distributions, Chapter 11, in: Exploring Data Tables Trends, and Shapes. Eds. Hoaglin, Mosteller, and Tukey. New York, NY: John Willey, 1985.
- Hogg, R. V.; S. A. Klugman (Hogg/ Klugman 1984): Loss Distributions, Wiley, New York.
- Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (Hosking/ Wallis 1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution, in: Technometrics, 29, S. 339 – 349.
- Klugman, S. A.; H. H. Panjer; G. E. Willmot (Klugman/ Panjer/ Willmot 2004): Loss Models – From Data to Decisions, 2nd ed., Wiley.
- Koryciorz, S. (Koryciorz 2004): Sicherheitskapitalbestimmung und –allokation in der Schadenversicherung, Eine risikotheorietische Analyse auf der Basis des Value-at-Risk und des Conditional Value-at-Risk, zugl. Dissertation Universität Mannheim, 2004.
- Kunzelmann, N.; M. Quick (Kunzelmann/ Quick 2008): OpRisk-Methoden in der Versicherungswirtschaft – ein Überblick, Behandlung von operationellen Risiken unter Solvency II, in: Risiko Manager 8/2008, S. 14 – 23.
- Mandl, J. (Mandl 2007): A Data-Analytic Examination of the Risk in Hedge Funds Returns: The g-and-h Distribution, in: Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 171.
- Martinez, J.; B. Iglewicz (Martinez/ Iglewicz 1984): Some Properties of the Tukey g and h Family Distributions, in: Communications in Statistics - Theory and Methods 13, S. 353 – 369.
- Matthys, G.; J. Beirlant (Matthys/ Beirlant 2003): Estimating the Extreme Value Index and High Quantiles with Exponential Regression Models, in: Statistica Sinica, 13, S. 853 – 880.

- McNeil, A. J.; R. Frey (McNeil/ Frey 2000): Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, ETH Zürich, 2000.
- McNeil, A. J.; R. Frey; P. Embrechts (McNeil/ Frey/ Embrechts 2005): Quantitative Risk Management, Princeton University Press, Princeton, Oxford.
- McNeil, A. J.; T. Saladin (McNeil/ Saladin 1997): The Peaks over Threshold Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions, ETH Zürich.
- Mikosch, Thomas (Mikosch 2004): Non-Life Insurance Mathematics, Springer, Berlin u.a.
- Mills, T. C. (Mills 1995): Modelling Skewness and Kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE Index Return Distributions, in: The Statistician, Vol. 44, No. 3, 1995.
- Moscadelli, Marco (Moscadelli 2004): The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee, 2004. Temi di discussione Working Paper.
- Neslehova, J., P. Embrechts, V. Chavez-Demoulin (Neslehova/ Embrechts/ Chavez-Demoulin 2006): Infinite Mean Models and the LDA for Operational Risk, in: Journal of Operational Risk Vol. 1, pp. 3 – 25.
- Nguyen, M.-T., M. Ottmann (Nguyen/ Ottmann 2005): Das dicke Ende, Risknews 04/05, S. 43 – 46.
- Nyström, K., J. Skoglund (Nyström/ Skoglund 2002): Quantitative Operational Risk Management, Swedbank.
- Panjer, H. H. (Panjer 2006): Operational Risk, Wiley, Hoboken, NJ.
- Pickands, J. (Pickands 1975). Statistical inference using extreme order statistics, in: Annals of Statistics, 3, S. 119 – 131.

Rachev, S.; A. Chernobai; C. Menn (Rachev/ Chernobai/ Menn 2006): Empirical Estimation of Operational Loss Distributions, Working Paper, UC Santa Barbara/ Cornell University.

Smith, R. L. (Smith 1987). Estimating tails of probability distributions, in: *Annals of Statistics*, 15, S. 1174 – 1207.

Tukey, J. W. (Tukey 1977a): Modern techniques in data analysis. NSF-Sponsored Regional Research Conference, Southeastern Massachusetts University, North Dartmouth, MA.

Tukey, J. W. (Tukey 1977b): *Exploratory Data Analysis*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1977.