

Serie: Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten - Teil 4

Ausfallwahrscheinlichkeiten im Konjunkturzyklus – Credit Portfolio View

Ein Beitrag von Uwe Wehrspohn

Wir haben in unserer Serie bisher zwei Ansätze dargestellt, wie die Ausfallwahrscheinlichkeiten von Firmen aus Kreditratings und einer Historie von beobachteten Ausfällen geschätzt werden können.

Im Mittelwertmodell (vgl. RiskNEWS 05.2002, pp. 7-18) wurden die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Firmen in einer bestimmten Ratinggruppe als konstant angenommen und aus den zufällig um diesen Wert herum schwankenden Ausfallhäufigkeiten geschätzt.

Im Credit Risk+ Modell (vgl. RiskNEWS 09.2002, pp. 69-77) wurden die Ausfallwahrscheinlichkeiten selbst als von Periode zu Periode zufällig angesehen. Insbesondere wurde angenommen, die Ausfallwahrscheinlichkeiten hingen von systematischen Risikofaktoren ab, die im Modell aber anonym blieben und nur eine intuitive Erklärung für die Schwankungen von beobachteten Ausfällen darstellten.

Thomas Wilson geht in dem von ihm entwickelten und 1997 publizierten Modell Credit Portfolio View¹ einen Schritt darüber hinaus, indem er versucht einen *empirischen* Zusammenhang zwischen dem Ausfallverhalten von Firmen und makroökonomischen Konjunkturindikatoren herzustellen. Wir zeigen in diesem Artikel, wie Ausfallwahrscheinlichkeiten in Credit Portfolio View geschätzt werden, welche Probleme hierbei auftreten und welche Auswirkungen sie auf die Glaubwürdigkeit der Ergebnisse haben.

Motivation

Zyklische Entwicklungen von Ausfallhäufigkeiten können in vielen Volkswirtschaften gut empirisch belegt werden.

¹ Von McKinsey & Company ist eine Softwareimplementation von Credit Portfolio View erhältlich.

Abbildung 1

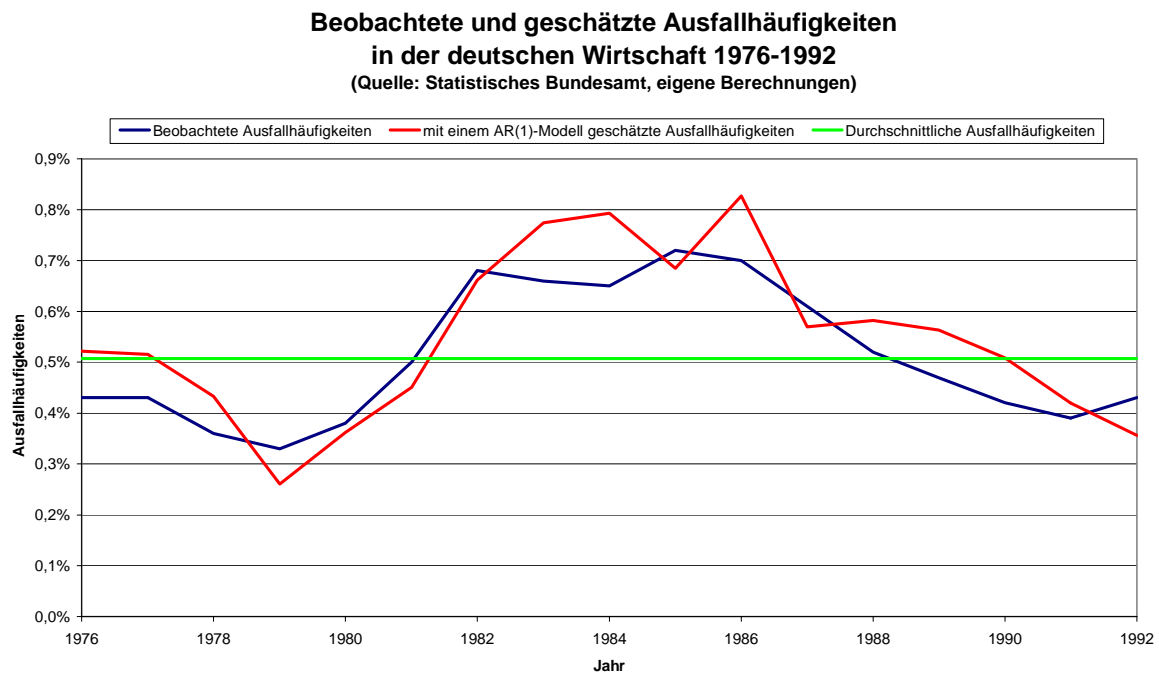


Abbildung 1 zeigt jährliche Ausfallraten für die deutsche Wirtschaft von 1976 bis 1992². Von 1976 bis 1981 sind die Ausfallraten deutlich niedriger als der Mittelwert des Zeitraums bis 1992, von 1981 bis 1988 liegen sie weit über dem Mittelwert und von 1988 bis 1992 sinken sie wiederum. Durch das Mittelwertmodell werden die Ausfallraten also in Boomphasen überschätzt, während sie in der Rezession genauso deutlich unterschätzt werden. Die Überlegung bei der Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten einen Zusammenhang zwischen Ausfallhäufigkeiten und makroökonomischen Faktoren herzustellen liegt aufgrund dieser Beobachtungen also nahe³.

Zwei Verfeinerungen sind jedoch notwendig. Da sie u.U. völlig verschiedene Güter und Dienstleistungen anbieten, sind nicht alle Branchen gleich stark in die Makroökonomie eingebunden. Wilson zeigt, dass zwischen den einzelnen Industriezweigen große Unterschiede in den jährlichen Schwankungen der Ausfallraten auftreten. So wird etwa das Baugewerbe sehr stark von Konjunkturschwankungen getroffen, während sich der Energie- und Bergbausektor wesentlich gleichmäßiger entwickeln⁴. Die Analyse des Ausfallverhaltens von Firmen sollte also ihre Branche mit einbeziehen.

Es ist ebenfalls eine bekannte Tatsache, dass die Wirkung von Konjunkturkrisen auf die Bonität einer Firma auch von ihrer allgemeinen finanziellen und wirtschaftlichen Situation abhängt. Firmen mit einer schwachen Marktposition werden von einer Rezession im allgemeinen härter betroffen als

² Die Daten umfassen die Gesamtheit der Mehrwertsteuerzahler der Bundesrepublik Deutschland, d.h. die wirtschaftlich aktiven Firmen aller Größenordnungen, Ratings und Branchen. Für Einzelheiten vergleiche Bär (2000).

³ Ein Vorbehalt gegenüber den Datenbeispielen von Wilson und Bär zur Motivation des Modells muss eingeräumt werden, da beide Autoren immer nur gepoolte Daten betrachten und keine Ratings unterscheiden. In der Praxis wird allerdings typischerweise zumindest ein Teil der konjunkturellen Schwankungen der Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma durch Ratingveränderungen erfasst. Dies kann dazu führen, dass die Bonität einer Firma im Konjunkturzyklus deutlich schwankt, während die Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Ratings weitgehend stabil bleiben. In einer solchen Situation wäre Credit Portfolio View ein Teil seiner Grundlage entzogen.

⁴ Vgl. Wilson (1997a), p. 112f.

sehr kompetitive Unternehmen. Dies geht sogar so weit, dass eine makroökonomische Abhängigkeit der Ausfallraten von Investment Grade-Firmen nicht nachweisbar ist. Wilson wählt deshalb die Speculative Grade-Firmen einer Branche als Indikator für die wirtschaftliche Gesundheit dieses Industriezweigs und als Angriffspunkt für makroökonomische Einflüsse. Erst in einem weiteren Schritt leitet er die Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten einzelner Ratinggruppen in der Branche ab.

Credit Portfolio View geht aber noch weiter. Das Ziel ist nicht nur, das gegenwärtige Ausfallverhalten von Firmen zu erklären, sondern auch die Ausfallwahrscheinlichkeiten für jede Periode bis zur Fälligkeit der am längsten laufenden Kredite im gesamten Bankportfolio zu schätzen, also über einen Zeithorizont von 10 bis 30 Jahren in die Zukunft⁵. Wilson argumentiert, dass einige Kontrakte so illiquide seien, dass eine Bank gezwungen sei sie bis zur Fälligkeit zu halten, selbst wenn die Kreditqualität des Schuldners ver falle. Um dem Kreditrisiko dieser Art Exposure gerecht zu werden, werden deshalb für jede Periode Ausfallwahrscheinlichkeiten des Schuldners geschätzt bis zum Erlöschen des Exposures⁶.

Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Um dieses Ziel zu erreichen, geht Credit Portfolio View in drei Schritten vor⁷:

1. Zunächst wird ein Modell für die zukünftige Entwicklung der relevanten makroökonomischen Faktoren gewählt⁸. Das Modell wird mit historischen Beobachtungen der Makrofaktoren gefittet. Indem in einzelnen zukünftigen Perioden Abweichungen von der Modellgleichung zufällig gezogen werden, wird die Entwicklung der Makrofaktoren über den gewünschten Zeithorizont simuliert (s.u.).
2. In einem zweiten Schritt wird ein Multi-Faktor-Modell gewählt, um den Zusammenhang zwischen den jährlichen Ausfallraten der Speculative Grade-Firmen der einzelnen Branchen und den Makrofaktoren herzustellen. Das Modell wird wieder mit historischen Daten gefittet, und zukünftige Ausfallwahrscheinlichkeiten werden als zufällige Abweichungen von der Modellgleichung simuliert.
3. Schließlich werden die aus den ersten beiden Schritten resultierenden Simulationsergebnisse verwendet, um bedingte Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten für jedes Jahr, jede Branche und jedes Rating bis zum Ende des betrachteten Zeithorizontes zu erhalten.

Im einzelnen bedeutet dies :

⁵ Wilson (1997a), p. 113.

⁶ Beachte, dass Wilson hier implizit einen neuen Risikobegriff für das Portfoliorisikomanagement einführt. Normalerweise wird das Portfoliorisiko definiert als die Verteilung der Wertschwankungen des Portfolios über einen gleichmäßigen Zeitraum für alle Geschäfte. Die Laufzeit des einzelnen Kontraktes spielt hier keine Rolle, da angenommen wird, dass sich die Portfoliostruktur kontinuierlich erneuert und deshalb gleich bleibt.

Wilson's Ansatz mit Berücksichtigung der individuellen Restlaufzeiten der Geschäfte wird eher bei der Bewertung von Basket-Kreditderivaten eingesetzt. Hier wird das Risiko eines fest abgegrenzten Portfolios von Geschäften verkauft, so dass sich einerseits das Portfolio nicht erneuert und andererseits die Verluste zukünftiger Perioden in der Bewertung berücksichtigt werden müssen. Für die Anwendungen des klassischen Portfoliorisikomanagements ist dieser Risikobegriff an sich ungeeignet, da er Risiken beinhaltet, die noch gar nicht existieren und erst in der Zukunft eintreten können. Warum soll eine Bank etwa heute Eigenkapital für das Ereignis unterlegen, dass ein Kredit in fünf Jahren ausfällt?

⁷ Vgl. Wilson (1997a), p. 114

⁸ Das Modell kann globale Faktoren umfassen. Der Schwerpunkt liegt allerdings darauf das länder- und branchenspezifische Ausfallverhalten von Firmen zu erklären.

Für jede Land / Branchen-Kombination werden n makroökonomische Faktoren ausgewählt und jeweils durch univariate autoregressive Prozesse dargestellt (z.B. AR(p)- oder ARIMA(p,d,q)-Prozesse). Alle Parameter werden mit kleinste-Quadrate-Methoden geschätzt. Der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_{macro,t}$ der Schätzfehler der gefitteten Faktormodelle wird als normalverteilt angenommen mit Erwartung 0 und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{macro} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{macro}$ wird wie die Modellparameter auch aus den historischen Daten geschätzt. Um die historischen Zeitreihen der einzelnen Makrofaktoren in die Zukunft zu verlängern, werden die Schätzfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_{macro,t}$ durch unabhängige Züge aus der spezifizierten Normalverteilung für die einzelnen Perioden simuliert und als Innovationsterme in die Faktormodelle eingesetzt.

Um sicherzugehen, dass die im zweiten Schritt geschätzten und dann für die zukünftigen Perioden simulierten Ausfallwahrscheinlichkeiten der Firmen auch tatsächlich Werte zwischen 0 und 1 annehmen, werden die beobachteten Ausfallhäufigkeiten der gepoolten Speculative Grade-Firmen durch die sog. Logit-Transformation auf die reelle Achse abgebildet:

$$y_{t,i} = L(p_{t,i}) = \ln\left(\frac{1-p_{t,i}}{p_{t,i}}\right)$$

Hierbei ist $p_{t,i}$ die beobachtete Ausfallhäufigkeit in Periode t und Branche i und $y_{t,i}$ die transformierte Ausfallrate. $y_{t,i}$ wird dann gegen die das Auffallverhalten in Branche i erklärenden makroökonomischen Faktoren $X_{1,i}, \dots, X_{n,i}$ regrediert⁹

$$y_{t,i} = \beta_{0,i} + \beta_{1,i}X_{1,i,t} + \dots + \beta_{n,i}X_{n,i,t} + \varepsilon_{def,i,t}$$

$\beta_{0,i}, \dots, \beta_{n,i}$ sind unbekannte Parameter. Wie im ersten Schritt werden die Parameter geschätzt, indem kleinste-Quadrate-Methoden auf die transformierten Ausfallraten angewendet werden¹⁰. Die Vektoren der Fehlerterme $\boldsymbol{\varepsilon}_{def,t}$ über die einzelnen Branchen werden wieder als seriell unabhängig normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{def}$ angenommen. Zukünftige Werte von $y_{t,i}$ können durch unabhängiges Ziehen dieser Fehlerterme aus der angegebenen Normalverteilung¹¹ simuliert werden. Die resultierenden Werte für $y_{t,i}$ werden dann durch die inverse Logit-Transformation

$$p_{t,i} = L^{-1}(y_{t,i}) = \frac{1}{1 + \exp(y_{t,i})}$$

in Ausfallwahrscheinlichkeiten zurücktransformiert.

⁹ Beachte, dass in Credit Portfolio View wie in Credit Risk+ die Kreditausfälle als bedingt unabhängig angenommen werden, gegeben ein makroökonomisches Szenario.

¹⁰ Vgl. Bär (2000), p. 2 und 12. Dieses Schätzverfahren wird auch in McKinsey's Softwareimplementation von Credit Portfolio View verwendet, vgl. McKinsey (1999), p. 36.

¹¹ Wilson erlaubt auch Korrelationen zwischen $\boldsymbol{\varepsilon}_{macro,t}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_{def,t}$ und simuliert alle Fehlerterme gleichzeitig.

Der letzte Schritt, die Berechnung bedingter Migrationsmatrizen für die einzelnen Ratings in den einzelnen Branchen für alle Perioden ist in Wilsons Publikationen nicht gut dokumentiert. Es wird lediglich angedeutet, dass das Verhältnis der simulierten Ausfallwahrscheinlichkeit der Speculative Grade-Firmen $p_{t,i}$ für die zukünftige Periode t zu ihrer mittleren Ausfallwahrscheinlichkeit \bar{p}_i , also

$$\frac{p_{t,i}}{\bar{p}_i},$$

als Indikator dafür dient, wie weit sich die Migrationswahrscheinlichkeiten aufgrund des simulierten makroökonomischen Hintergrundes von ihrem langfristigen Mittel entfernt haben könnten. Ergebnis

dieser Überlegungen ist eine bedingte Migrationsmatrix $M\left(\frac{p_{j,i}}{\bar{p}_i}\right)$.

Durch eine Markov-Annahme¹² kann schließlich eine kumulierte Migrationsmatrix für t Jahre¹³ berechnet werden

$$M_{t,i} = \prod_{j=1}^t M\left(\frac{p_{j,i}}{\bar{p}_i}\right).$$

Diskussion

Das Ziel, bei der Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten die historischen Ausfallhäufigkeiten von Firmen mit beobachtbaren systematischen Risikofaktoren wie z.B. makroökonomischen Indikatoren in Beziehung zu setzen, ist sicher der wesentliche Vorteil und Beitrag von Credit Portfolio View im Vergleich mit Credit Risk+ und dem Mittelwertmodell.

Aus einer Reihe von Gründen ist es allerdings fraglich, ob dieses Ziel wirklich erreicht wurde.

1. Modellierung des makroökonomischen Prozesses

Credit Portfolio View beschreibt die unterliegenden makroökonomischen Faktoren durch autoregressive Prozesse, d.h. durch Zeitreihen, deren zukünftige Entwicklung ausschließlich durch ihre eigene Vergangenheit¹⁴ erklärt wird. Da eine langfristige Vorhersage der Makrofaktoren und des Ausfallverhaltens der Firmen beabsichtigt ist, ist diese Modellierung sicherlich vorteilhaft im Blick auf die softwaretechnische Umsetzung des Modells, denn sie macht die notwendigen Simulationen extrem einfach handhabbar, da überhaupt keine zusätzlichen Inputdaten erforderlich sind. Aus zwei Gründen sind autoregressive Prozesse aber problematisch als Modell für die Makrofaktoren.

Aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht ist es mehr als ungewiss, ob die Makrofaktoren, die Wilson als Beispiele angibt¹⁵, wie etwa die Arbeitslosenquote, das Wachstum des Bruttosozialproduktes,

¹² Die Markov-Annahme bedeutet, dass die Migrationswahrscheinlichkeiten einer Firma in Periode t nur von ihrem aktuellen Rating (und den aktuellen Werten aller weiteren Einflussfaktoren) abhängt und nicht von ihrem kompletten Migrationspfad (und den Werten der übrigen Einflussfaktoren) in der Vergangenheit.

¹³ Wir nehmen hier an, die Gegenwart sei der Zeitpunkt $t = 0$.

¹⁴ Und durch zufällige, unkorrelierte Fehlerterme (weißes Rauschen).

¹⁵ Wilson (1997a), p. 113.

die Staatsquote etc., langfristig wirklich gut allein durch ihre eigene Vergangenheit beschrieben werden können. Mehr noch als Aktienkurse hängen diese Faktoren stark vom Ausgang von Wahlen, von politischen Entscheidungen, vom Willen Reformen umzusetzen und anderen exogenen Einflüssen ab, die wenig in der Vergangenheit verwurzelt und deshalb extrem schwer vorherzusagen sind. Dies ist einer der Gründe warum Makrofaktoren schon bei relativ kurzen Zeithorizonten von ein bis zwei Jahren auch von führenden Wirtschaftsforschungsinstituten nur sehr ungenau prognostiziert werden können¹⁶.

Zweitens ist die Persistenz von Schocks und Extremwerten bei autoregressiven Prozessen relativ groß. Wenn sie als Modell für makroökonomische Faktoren in einem Kreditrisikomodell verwendet werden, wird die Wirkung von Wirtschaftskrisen im Modell für viele Jahre spürbar sein.

Abbildung 2

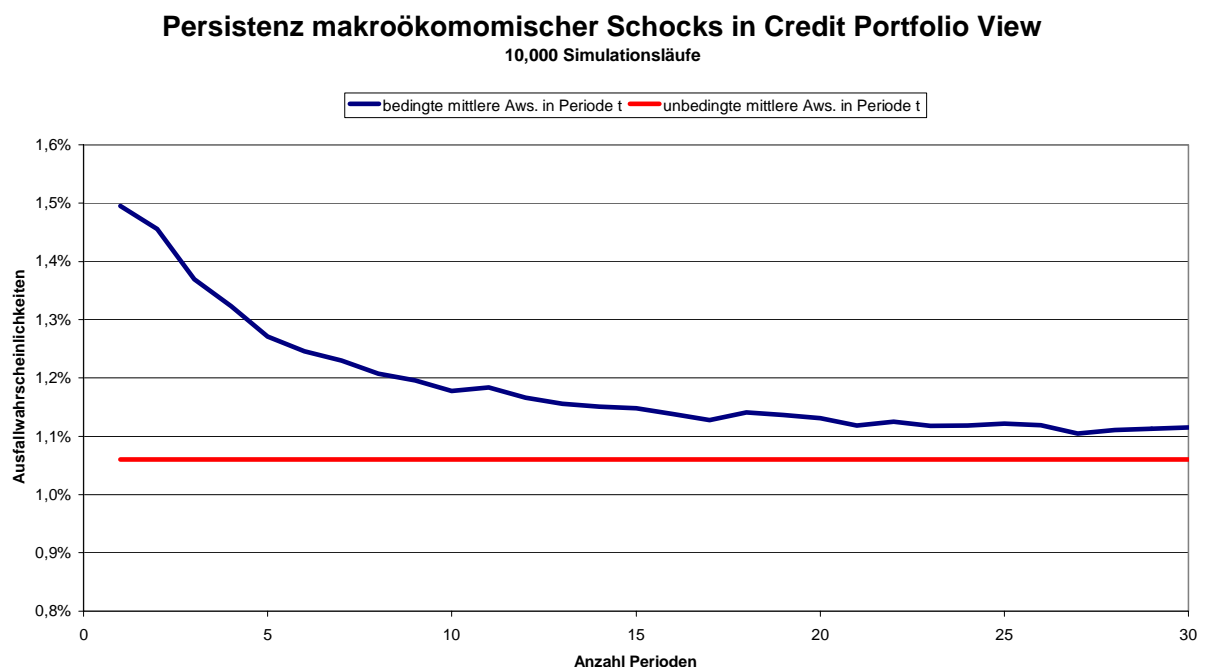


Abbildung 2 vergleicht die bedingte mittlere einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit von Speculative Grade-Firmen t Perioden nach einer Krise mit ihrer unbedingten mittleren Ausfallwahrscheinlichkeit. In beiden Fällen wird angenommen, dass die Wirklichkeit exakt nach den Prinzipien funktioniert, die Credit Portfolio View voraussetzt und dass alle Parameterwerte bereits bekannt sind und nicht geschätzt werden müssen¹⁷. Es wird deutlich, dass sich bei dieser Modellierung die Wirtschaft auch

¹⁶ Dies wirft die zusätzliche Frage auf, ob der Versuch, die Arbeitslosenquote des Jahres 2025 vorherzusagen, überhaupt als seriöses Unterfangen gewertet werden kann oder ob hier nicht die Aussage jedes Modells zu völliger Beliebigkeit verkommt.

¹⁷ Der Makrofaktor wird beschrieben durch einen AR(2)-Prozess

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_X = 0.2X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + \varepsilon_X$$

wobei ε_X normalverteilt ist mit Erwartung 0 und Standardabweichung 0.9. Die Logit-Transformation der Ausfallwahrscheinlichkeiten ist angenommen als

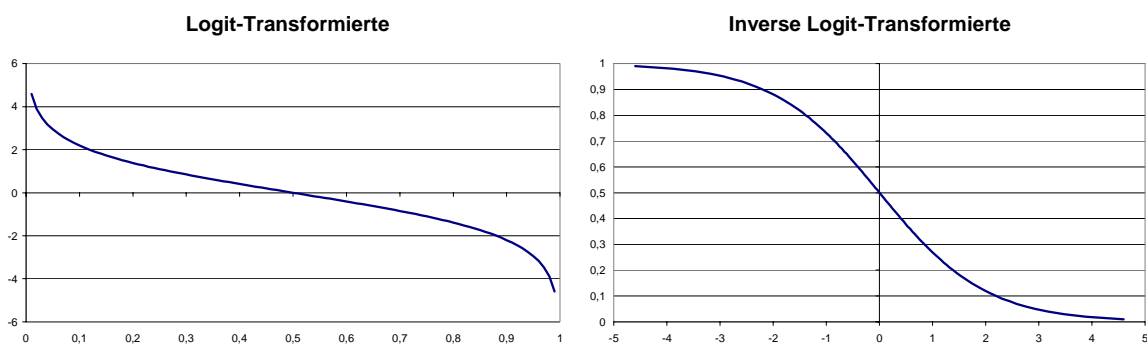
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_y = 5 + X_{t-1} + \varepsilon_y$$

30 Jahre nach der Krise noch nicht vollständig erholt hätte und dass die Ausfallwahrscheinlichkeit deutlich über dem langfristigen Mittel bliebe. Es ist eine offene Frage, ob dieses Verhalten eine gute Beschreibung langfristiger Ausfallraten ist.

2. Abhängigkeit der Ausfallraten von den Makrofaktoren

Ein entscheidender Schritt in dem Regressionsmodell, das die Ausfallwahrscheinlichkeiten der speculative Grade-Firmen in den einzelnen Industriezweigen in Beziehung zu den sieben simulierten Makrofaktoren setzt, ist die Logit-Transformation. Die Logit-Transformation hat eine sehr kritische Eigenschaft. Sie bildet nicht nur das Einheitsintervall auf die reelle Achse ab, sondern sie ist auch nicht-linear, und zwar ist sie konvex im Intervall $[0; 0,5]$ und konkav in $[0,5; 1]$ (vgl. Abbildung 3). Es ist in diesem Zusammenhang wichtig zu beachten, dass Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht stabil sind unter nicht-linearen Transformationen. Es kann im allgemeinen nicht direkt an der funktionalen Form der Transformation abgelesen werden, wie die Momente und die stochastischen Eigenschaften der Verteilung durch die Transformation verzerrt werden.

Abbildung 3

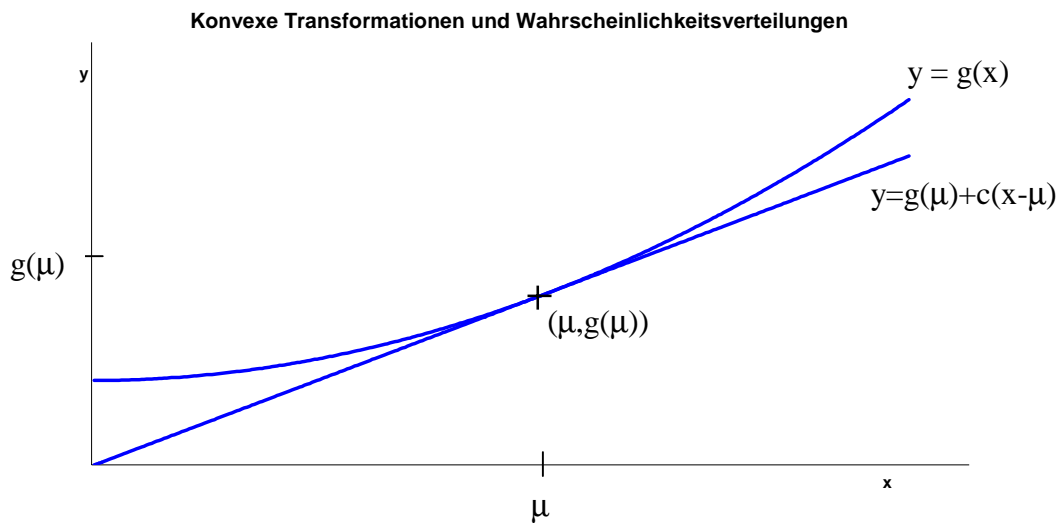


Auch in Krisenzeiten kann davon ausgegangen werden, dass jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten 50% nicht überschreiten. Im relevanten Bereich ist die Logit-Transformation also konvex. Um die Wirkung einer konvexen Transformation auf eine Verteilung zu sehen, nehmen wir eine beliebige Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ an. Sei $g(x)$ eine konvexe Transformation, die auf dem Variationsbereich von X definiert ist. Dann existiert eine Gerade durch den Punkt $(\mu, g(\mu))$, die vollständig unterhalb des Graphen von g liegt (vgl. Abbildung 4).

wobei ε_y normalverteilt ist mit Erwartung 0 und Standardabweichung 0.3. Die Krise wird beschrieben durch die Startwerte $X_0 = X_{-1} = -1$.

Beachte, dass die Persistenz einer Krise wächst in den Parametern α_1, α_2 , und β_1 und fällt in der Standardabweichung der Fehlerterme.

Abbildung 4



Für alle x gilt also

$$g(x) \geq g(\mu) + c(x - \mu).$$

Wenn $Y = g(X)$ einen endlichen Erwartungswert besitzt, folgt aus der Monotonie und Linearität des Lebesgue-Integrals, dass

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \geq \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mu) + c(x - \mu)] dF(x) \\ &= g(\mu) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)}_{=1} + c \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) dF(x)}_{=0} = g(\mu) \end{aligned}$$

so dass gilt¹⁸

$$E(g(x)) \geq g(\mu).$$

Beachte, dass Gleichheit hier nur für deterministische Zufallsvariablen gilt, also wenn $P(X=\mu) = 1$.

Dies bedeutet für Credit Portfolio View, dass die Erwartungswerte der transformierten Ausfallraten einer Periode bedingt auf den Werten der Makrofaktoren strikt größer sind als die transformierten bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten¹⁹. Nur wenn die beobachteten Ausfallraten der Firmen mit Wahrscheinlichkeit 1 mit den mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten übereinstimmen, sind beide Erwartungswerte gleich. Obwohl bedingte Unabhängigkeit angenommen wurde²⁰, folgt aus dem

¹⁸ Dieses Ergebnis ist auch bekannt als die Jensen'sche Ungleichung.

¹⁹ Hier schlägt zu Buche, dass die beobachteten Ausfallraten einer Periode bei bedingter Unabhängigkeit der Ausfälle eine Zufallsvariable sind, deren Erwartungswert identisch ist mit der mittleren bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit der Firmen in der Periode.

²⁰ Wenn die Modellannahme nicht zutrifft, dass die makroökonomischen Faktoren die Abhängigkeiten zwischen den Firmen vollständig erklären, ist die Aussage, dass die Ausfallraten einer Periode ein konsistenter Schätzer der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Periode sind, im allgemeinen inkorrekt. Zumindest bedingte Unkorreliertheit-

Gesetz der großen Zahl und dem zentralen Grenzwertsatz, dass dies nur dann der Fall sein kann, wenn in jeder Branche und in jeder Periode Ausfalldaten über unendlich viele Speculative Grade-Firmen vorliegen.

Wenn nur Daten über eine endliche Anzahl Speculative Grade-Firmen in einem Industriezweig vorliegen, können Ausfallraten nicht mit Ausfallwahrscheinlichkeiten gleichgesetzt werden. Die Regression gegen die Makrofaktoren wird dann mit transformierten Ausfallraten durchgeführt, von denen man von vorneherein erwartet, dass sie größer sind als die entsprechenden transformierten Ausfallwahrscheinlichkeiten. Da eine lineare Transformation nach Konstruktion unverzerrt ist, liegt die erwartete geschätzte Regressionsgerade über der wahren Regressionsgerade, selbst wenn das Modell korrekt spezifiziert ist²¹. In der Folge sind deshalb auch die um die Regressionsgerade herum für zukünftige Perioden simulierten transformierten Ausfallwahrscheinlichkeiten zu groß.

Beachte schließlich, dass die inverse Logit-Transformation streng monoton fällt. Wenn die simulierten Werte zu groß sind, sind deshalb die zurücktransformierten Werte, d.h. in diesem Fall die simulierten Ausfallwahrscheinlichkeiten, aufgrund der fallenden Rücktransformation zu gering.

D.h., wenn nur Daten über eine endliche Anzahl Speculative Grade-Firmen in jeder Branche vorliegen, sind die Schätzungen und dementsprechend auch die Simulationsergebnisse zugunsten zu niedriger Ausfallwahrscheinlichkeiten hin verzerrt. Das Ausfallrisiko wird also in Credit Portfolio View in seiner gegenwärtigen Implementation systematisch unterschätzt²².

Beachte, dass dieser systematische Schätzfehler an sich unnötig ist, da durch nicht-lineare Verfahren wie z.B. Maximum-Likelihood-Methoden alle Parameter im Logit-Modell unter den gemachten Annahmen erwartungstreu geschätzt werden könnten. Die gegenwärtige Implementation des Modells könnte an dieser Stelle korrigiert werden. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass der aus dem bisherigen Konzept zu erwartende Schätzfehler in praktischen Anwendungssituationen eine relevante Größenordnung erreicht und unbedingt berichtigt werden sollte.

3. Beispiel

Um diesen Effekt zu illustrieren, nehmen wir an, der wahre Zusammenhang zwischen der Makroökonomie und dem Ausfallverhalten der Firmen sei genau so, wie es in Credit Portfolio View beschrieben ist. D.h. wir lassen alle Anmerkungen, die zu Beginn der Diskussion geäußert worden, außer Acht und gehen davon aus, dass kein grundsätzlicher Modellierungsfehler vorliegt.

Wir betrachten eine Branche, in der das Ausfallverhalten der Firmen nur von einem makroökonomischen Faktor abhängt. Wir nehmen an, dieser Faktor X folge dem AR(2)-Prozess

$$X_t = 0.4X_{t-1} + 0.4X_{t-2} + 0.1\epsilon_X$$

wobei die ϵ_X unabhängig und standardnormalverteilt seien. Um den systematischen Schätzfehler im nächsten Modellierungsschritt zu isolieren, nehmen wir an, dass alle Parameter des Makroprozesses bekannt seien, so dass an dieser Stelle kein zusätzlicher Schätzfehler eintritt.

heit der Ausfälle oder eine andere Eigenschaft, die die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahl gewährleistet, muss hier angenommen werden.

²¹ D.h., der Fehler tritt auch dann auf, wenn die Welt genauso gestaltet ist, wie das Modell annimmt.

²² Dass Credit Portfolio View betont wenig Risiko in Portfolien diagnostiziert, wurde an anderer Stelle von Niethen (2001), p. 135, im Zusammenhang mit einer Analyse von Korrelationskonzepten beobachtet.

Das wahre Regressionsmodell, das die transformierten Ausfallwahrscheinlichkeiten mit dem makroökonomischen Faktor in Beziehung setzt, sei

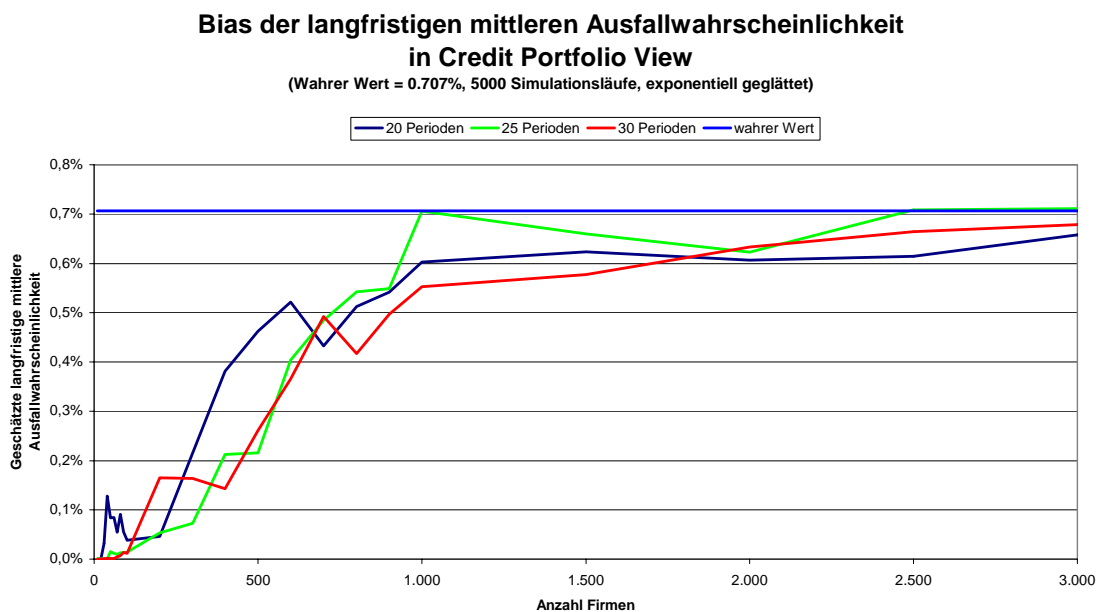
$$Y_t = 5 + X_{t-1} + 0.3\varepsilon_Y.$$

Der Prozess der Fehlerterme ε_Y sei wieder unabhängig standardnormalverteilt. Wieder nehmen wir an, dass die allgemeine Form des Regressionsmodells bekannt sei, so dass nur die Parameter $\beta_0 = 5$ und $\beta_1 = 1$ geschätzt werden müssen.

Obwohl die langfristige mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit von beiden Parametern abhängt, hat β_0 sicher den dominanten Einfluss. Weil die inverse Logit-Transformation monoton fällt, korrespondieren große Werte von β_0 mit geringen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Um das Modell zu fitten, wurde eine nach dem wahren Modell simulierte „historische“ Zeitreihe aus n Perioden unbekannter Ausfallwahrscheinlichkeiten und beobachteter (also bekannter) Ausfallhäufigkeiten für unterschiedliche Anzahlen von Speculative Grade-Firmen in dem Industriezweig für die Schätzungen der Parameter zugrunde gelegt. Danach wurden mit den geschätzten Parametern „zukünftige“ Ausfallwahrscheinlichkeiten für ebenfalls n Perioden simuliert. Das Zusatzproblem eines Prognosezeitraums, der wesentlich länger ist als die Beobachtungsreihe, die in die Parameterschätzungen eingeflossen ist, wurde vermieden.

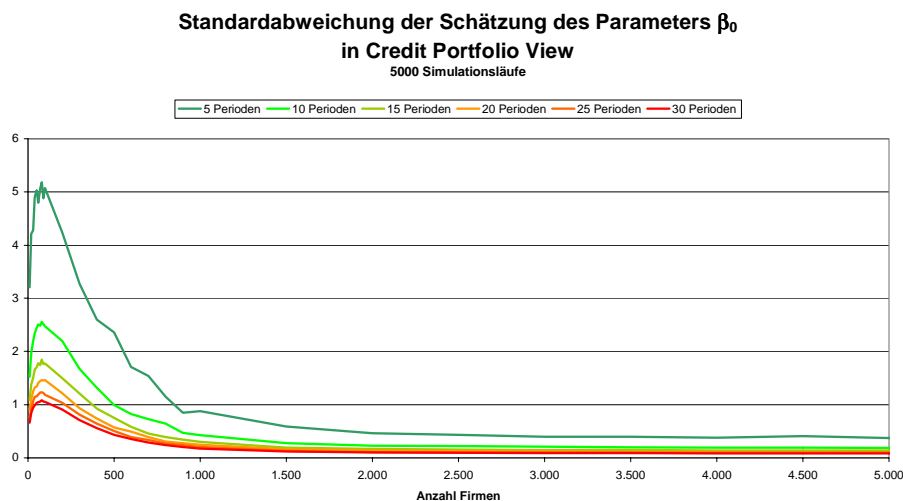
Abbildung 5



Beachte, dass der erwartete Schätzwert des Parameters β_0 nicht von der Länge der Zeitreihe der historischen Beobachtungen abhängt. Dies kommt daher, dass der AR(2)-Prozess, der die Entwicklung des systematischen Risikofaktors beschreibt, stationär ist und sich die Stationarität auf die wahren Ausfallwahrscheinlichkeiten und die beobachteten Ausfallraten überträgt. Da die Schätzung der Regressionsparameter auf den transformierten Ausfallraten unverzerrt ist, resultiert die Abweichung des erwarteten geschätzten vom wahren Parameterwert, d.h. der Bias, ausschließlich aus der Nicht-Linearität der Logit-Transformation. Wie bereits erwähnt, korrespondieren große Werte von β_0 mit kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Obwohl der mittlere Schätzwert für den Parameter nicht von der Anzahl der für die Analyse zur Verfügung stehenden Beobachtungsperioden abhängt, ist dies bei der Standardabweichung der Schätzung sehr wohl der Fall.

Abbildung 8



Wenn nur wenige Firmen und nur wenige Datensätze vorhanden sind, ist die Variation der Schätzungen beträchtlich. Bei mehr als 3000 Firmen in dem Segment hängt andererseits die verbleibende Varianz der Schätzungen fast ausschließlich von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungsperioden ab.

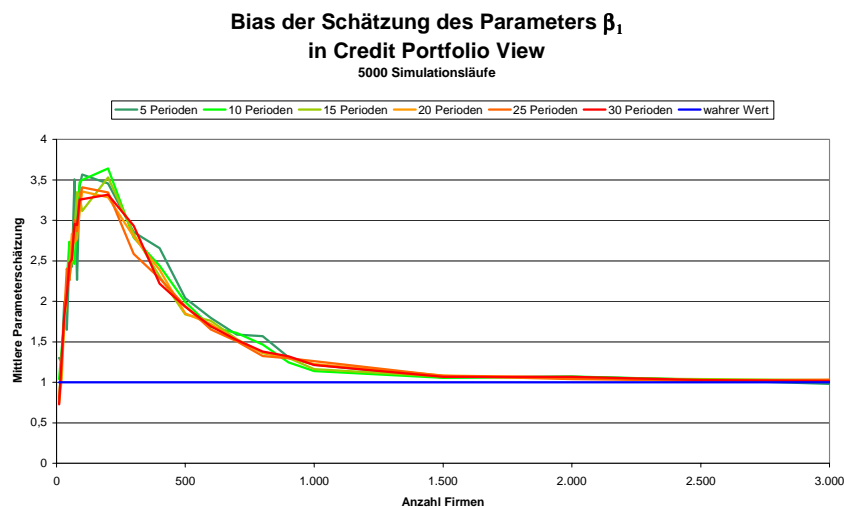
Wenn die Anzahl der Firmen sehr klein ist, ist die Wahrscheinlichkeit gar keinen Ausfall in einer Periode zu beobachten relativ groß, selbst wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit der einzelnen Firmen vergleichsweise hoch ist²⁴. Dies ist der Grund, weshalb die Volatilität der Schätzungen für eine kleine Firmenzahl wieder sinkt.

Das Ergebnis ist ähnlich, wenn wir den Parameter β_1 betrachten.

²³ Moody's Investors Service und Standard and Poor's weisen eine Firma dem Speculative Grade zu, wenn ihr Rating schlechter ist als Baa bzw. BBB. Dem entspricht eine Ausfallwahrscheinlichkeit von mehr als 0,2-0,3%.

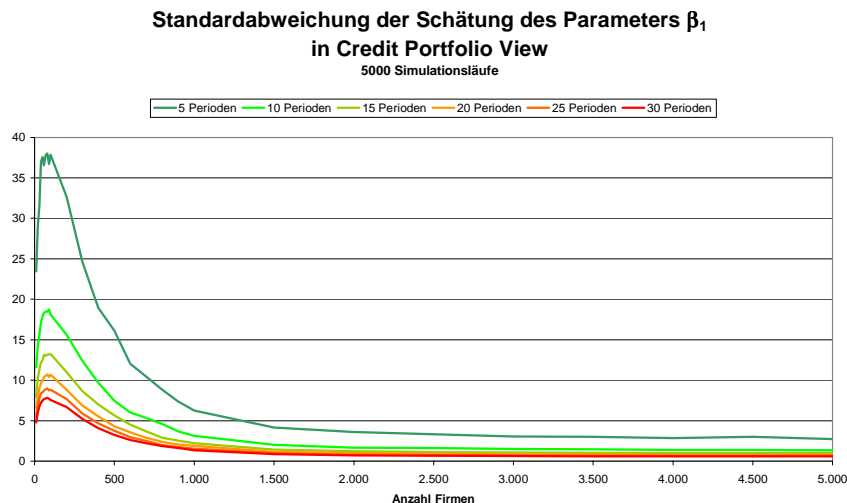
²⁴ Bei 50 unabhängigen Firmen, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% ausfallen, liegt die Wahrscheinlichkeit in einer Periode keinen einzigen Ausfall zu beobachten bei 36,4%.

Abbildung 9



Auch hier hängt der erwartete Schätzwert nicht von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungsperioden ab. Beachte aber, dass weit mehr Firmen in dem Industriezweig notwendig sind, um den Schätzfehler zu reduzieren als im Fall von β_0 .

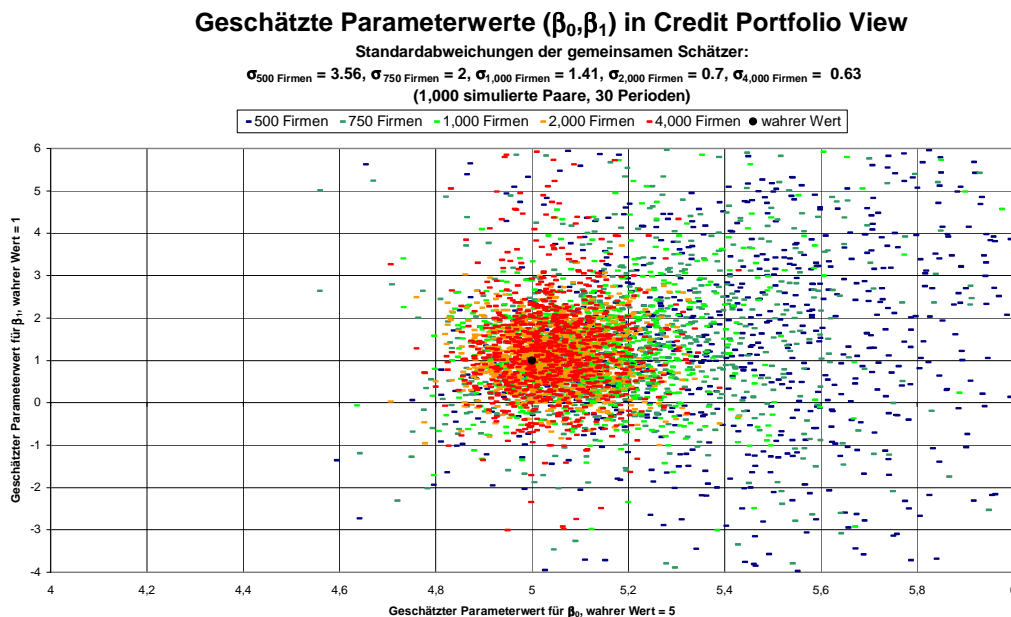
Abbildung 10



Der Verlauf der Standardabweichung der Schätzung von β_1 hat einen ähnlichen Verlauf wie bei der Schätzung von β_0 , allerdings ist der Betrag der Standardabweichung im Verhältnis zum Wert des Parameters wesentlich größer. Dies kommt daher dass der Fehlerterm ε_Y eine zweite Quelle der Variation ist neben dem systematischen Faktor. Sein nicht-systematischer Einfluss kann nur durch eine lange Beobachtungsreihe neutralisiert werden.

Die Verzerrung der Schätzungen wird besonders deutlich, wenn wir beide Parameter gleichzeitig betrachten.

Abbildung 11



Insbesondere für kleine Firmenzahlen zeigt sich klar, dass die Verteilungen der Schätzwerte großen Werten von (β_0, β_1) mehr Wahrscheinlichkeitsmasse zuweisen. Vor allem für β_0 ist dieser Effekt ausgeprägt zu sehen.

Die Tatsache, dass der Bias der Parameterschätzungen und der Einfluss der Firmenzahlen auf die Standardabweichungen der Schätzungen verschwindet, wenn Daten über mehrere tausend Firmen vorliegen, resultiert aus der fast sicheren Konvergenz der beobachteten Ausfallrate einer Periode gegen die mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit der Firmen, wenn die Firmenzahl gegen unendlich geht. Es ist beachtlich, dass die Logit-Transformation so sensitiv auf Abweichungen der Ausfallraten von den Ausfallwahrscheinlichkeiten reagiert, dass so viele Firmen notwendig sind, um den systematischen Fehler verschwinden zu lassen.

Um einen abschließenden Eindruck von dem verzerrenden Effekt zu bekommen, den das lineare Schätzverfahren in Zusammenhang mit der nicht-linearen Logit-Transformation auf die Ergebnisse hat, betrachten wir die Verteilungen der langfristigen mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten, die für zukünftige Perioden simuliert wurden, nachdem die Parameter geschätzt wurden.

Abbildung 12

Verteilung der mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten der geschätzten und simulierten Prozesse in Credit Portfolio View

(2.000 Simulationsläufe, 30 Perioden, exponentiell geglättet,
wahre mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit = 0.707%, Bins = 0.01%)

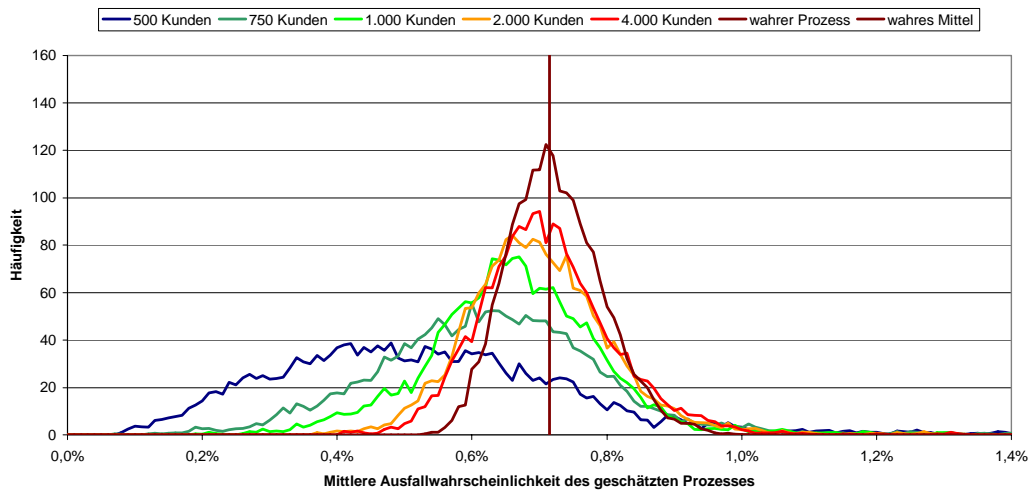


Abbildung 12 wurde wie folgt erstellt: Zunächst wurde der wahre Prozess so konstruiert wie oben im Beispiel angegeben. Der Prozess wurde über 30 Perioden simuliert und Ausfallhäufigkeiten wurden in jeder Periode für Samples von 500 bis 4000 Firmen simuliert und beobachtet. Die protokollierten Ausfallhäufigkeiten wurden verwendet, um die Parameter (β_0, β_1) zu schätzen. Mit den geschätzten Prozessen wurden Ausfallwahrscheinlichkeiten über die nächsten 30 Jahre simuliert und ihr Mittelwert berechnet. Diese gesamte Prozedur wurde 2000 mal wiederholt, um die Verteilungen der langfristigen mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten zu generieren.

Tabelle 1

	500 Firmen	750 Firmen	1000 Firmen	2000 Firmen	4000 Firmen	Wahre Verteilung
Erwartungswert	0,58%	0,64%	0,65%	0,69%	0,70%	0,71%
Standard- abweichung	1,07E-02	4,29E-03	1,69E-03	1,10E-03	9,97E-04	6,83E-04
Schiefe	3,89E-05	1,95E-06	2,44E-08	5,31E-10	3,98E-10	1,19E-10
Kurtose	1,57E-05	2,94E-07	8,09E-10	9,80E-12	5,21E-12	6,69E-13
Range 0	0,07%	0,07%	0,18%	0,37%	0,40%	0,53%
5%- Quantil	0,20%	0,34%	0,43%	0,53%	0,55%	0,60%
20%- Quantil	0,33%	0,48%	0,55%	0,60%	0,62%	0,65%
40%- Quantil	0,44%	0,57%	0,62%	0,65%	0,67%	0,69%
50%- Quantil	0,50%	0,61%	0,65%	0,68%	0,69%	0,70%
60%- Quantil	0,56%	0,65%	0,67%	0,70%	0,71%	0,72%
80%- Quantil	0,70%	0,74%	0,75%	0,76%	0,77%	0,76%
95%- Quantil	0,98%	0,90%	0,86%	0,87%	0,87%	0,83%
Range 1	42,66%	16,23%	4,15%	1,45%	1,31%	0,97%

Einige Kennzahlen der Verteilungen sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Drei Dinge sind auffällig. Erstens, der Erwartungswert der wahren langfristigen mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten wird bei Vorliegen von Daten über 4000 Firmen in einer Branche und einer Beobachtungsreihe über 30 Perioden systematisch unterschätzt. Zweitens, dieselbe Beobachtung gilt für den Median der Verteilungen.

lung. Der Median der wahren Verteilung entspricht dem 60%-Quantil der geschätzten Verteilung, wenn Daten über 4000 Firmen vorliegen. Er entspricht dem 80%-Quantil, wenn nur Daten über 500 Firmen vorliegen. Drittens, der Schätzfehler wird kleiner und Standardabweichung, Schiefe, Kurtose und Spannweite der geschätzten Verteilungen konvergieren gegen die entsprechenden Werte der wahren Verteilung, wenn die Anzahl der Firmen, über die Daten ausgewertet werden können, zunimmt²⁵.

Schließlich sei noch einmal betont, dass der systematische Schätzfehler in der Regression der Ausfallraten gegen die Makrofaktoren in Credit Portfolio View nicht durch die exakte funktionale Form der Logit-Transformation ausgelöst wird, sondern generell durch die Nicht-Linearität der Transformation in Kombination mit dem verwendeten Schätzverfahren. Bei jeder anderen nicht-linearen Transformation würde ein ähnlicher Effekt auftreten. D.h. es wäre keine Problemlösung die Logit-Transformation etwa durch eine Probit-Transformation zu ersetzen, z.B. durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung, die ebenfalls die reelle Achse und das Einheitsintervall in geeigneter Weise aufeinander abbildet²⁶. Anders als die Logit-Funktion ist die inverse Verteilungsfunktion der Normalverteilung konkav in $(0; 0,5]$, so dass die mittleren transformierten Ausfallraten hier kleiner sind als ihr transformierter Erwartungswert²⁷. Die Verteilungsfunktion, mit der die Regressionsergebnisse zurücktransformiert werden, ist monoton wachsend, so dass das gesamte Schätzergebnis die wahren Ausfallwahrscheinlichkeiten auch wieder unterzeichnet.

Der Schätzfehler kann insgesamt nur vermieden werden, wenn das Schätzverfahren auf die Nicht-Linearität der Transformation abgestimmt wird. Im Fall von Credit Portfolio View wäre dies etwa mit einer Logit-Maximum-Likelihood-Schätzung möglich.

4. Bedingte Migrationsmatrizen

Selbst wenn die Ausfallwahrscheinlichkeiten korrekt vorhergesagt würden, wäre dies nicht der letzte Schritt. Die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten wurde nicht für ein Rating, sondern für die gepoolten Firmen mit Speculative Grade-Ratings durchgeführt, d.h. für Firmen, von denen bekannt ist, dass sie unterschiedliche Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten haben. Die bisher erzielten Ergebnisse müssen also auf die einzelnen Ratingklassen übertragen werden.

Zu diesem Zweck schlägt Wilson eine weitere Transformation vor, bei der sich die bedingten Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten der Firmen in einer bestimmten Branche mit einem bestimmten Rating aus dem Verhältnis der simulierten bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit der Speculative Grade-Firmen in dieser Branche zu ihrer langfristigen mittleren Ausfallrate ergibt.

Nachdem aus dem oben gesagten deutlich wurde, dass Transformationen einen entscheidenden Einfluss auf die Eigenschaften einer Verteilung und die Präzision eines Modells haben können, ist es besonders kritisch, dass die Herleitung der bedingten Übergangsmatrizen eine Lücke in der veröffentlichten Dokumentation von Credit Portfolio View darstellt.

²⁵ Beachte, dass Standardabweichung, Kurtose und Spannweite der geschätzten Verteilungen aufgrund des unsystematischen, zufälligen Schätzfehlers, der dadurch verursacht wird, dass nur Beobachtungen in endlich viele Perioden vorliegen, immer etwas größer sind als die entsprechenden Werte der wahren Verteilung.

²⁶ Dies wird in anderem Zusammenhang von Kim (1999) vorgeschlagen. In seinem Modell tritt derselbe Schätzfehler auf, der oben beschrieben ist. Kim hat allerdings die Verteilungsfunktion der Normalverteilung nicht ins Gespräch gebracht, um einen Schätzfehler zu vermeiden, sondern weil sie von Credit Metrics verwendet wird, um Ratingmigrationen zu modellieren.

²⁷ Dies liegt wieder an der Jensen'schen Ungleichung, diesmal für konkave Funktionen.

Neben der Möglichkeit eines weiteren systematischen Schätzfehlers ist diese Transformation die dritte Schätzung in Folge zwischen den makroökonomischen Risikofaktoren und den Migrationswahrscheinlichkeiten der Firmen mit den einzelnen Ratings wobei jeder Schritt die Variabilität der Ergebnisse erhöht. Wir geben wieder ein

5. Beispiel

Die zukünftige makroökonomische Situation wird in Credit Portfolio View mit dem zeitlichen Abstand immer unabhängiger von der gegenwärtigen Situation. Die langfristigen mittleren Ausfallwahrscheinlichkeiten jeder Ratingklasse sollten deshalb gegen ihre langfristigen mittleren Ausfallraten konvergieren.

Durch Verwendung der oben erwähnten Markov-Annahme können kumulierte n-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten leicht aus den einjährigen Ausfallwahrscheinlichkeiten abgeleitet werden, indem die einjährigen Migrationsmatrizen, die etwa von den Ratingagenturen veröffentlicht werden, n-mal mit sich selber multipliziert werden²⁸. Ein Vergleich der Ergebnisse für einen 10-Jahres-Zeithorizont mit dem Beispiel vergleichen, das Wilson²⁹ für die deutsche Volkswirtschaft gibt, zeigt, dass die Resultate sehr stark voneinander abweichen.

Tabelle 2: Extrapolierte kumulierte 10-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten (durch Markov-Annahme)

Rating ³⁰	Extrapolation von Moody's Migrationsmatrix ³¹	Wilson's Ergebnisse	Verhältnis
AAA	0,47%	1,74%	374%
AA	1,35%	4,12%	305%
A	3,72%	9,58%	257%
BBB	9,71%	22,63%	233%
BB	24,78%	46,75%	189%
B	44,96%	69,12%	154%
CCC	68,55%	83,58%	122%

Die Abweichung ist umso bemerkenswerter, als Wilson selbst eine Markov-Annahme macht und Moody's einjährige Migrationsmatrix verwendet, um die langfristigen Übergangsmatrizen abzuleiten. Besonders für Investment Grade-Firmen sind die aus Moody's Daten abgeleiteten Ausfallwahrscheinlichkeiten nur ein Viertel bis halb so groß wie die von Wilson konstatierten. Die Transformation von Ausfallwahrscheinlichkeiten für den gepoolten Speculative Grade in ratingspezifische Ausfallwahrscheinlichkeiten ist offenbar keine selbstverständliche Sache. Es erscheint auch nicht als überzeugend, die Ergebnisse durch eine katastrophale wirtschaftliche Situation in Deutschland im Jahr 1997 zu erklären.

²⁸ Wilson selbst zitiert Moody's Migrationsmatrix, Wilson (1997a), p. 113, Tabelle A. Wir haben diese Daten für die Extrapolation in Tabelle 2 verwendet. Beachte, dass Wilson genau dieselbe Matrix in Wilson (1997c), Abbildung 6, also Standard and Poor's Migrationsmatrix zitiert!

²⁹ Wilson (1997a), p. 117, Tabelle B.

³⁰ Es ist Wilsons Terminology die Notation von Standard and Poor's für Moody's Ratingklassen zu verwenden (siehe oben Fußnote 28).

³¹ Siehe auch Fußnote 28.

Die Markov-Annahme vereinfacht sicherlich die Beschreibung des langfristigen Ausfallverhaltens von Firmen beträchtlich. Es ist allerdings nicht klar, wie nah sie an der Realität ist. Die Markov-Annahme impliziert, dass es keine systematischen Aneinanderreihungen von Ratingdowngrades oder –upgrades über mehrere Jahre gibt, so wie sie bei IBM in den 1980'er oder bei SAP in den 1990'er Jahren beobachtet werden konnten. Wir vergleichen deshalb Wilson's Ergebnisse mit den von Standard and Poor's direkt geschätzten kumulativen 10-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten³².

Tabelle 3: Direkt geschätzte kumulierte 10-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten

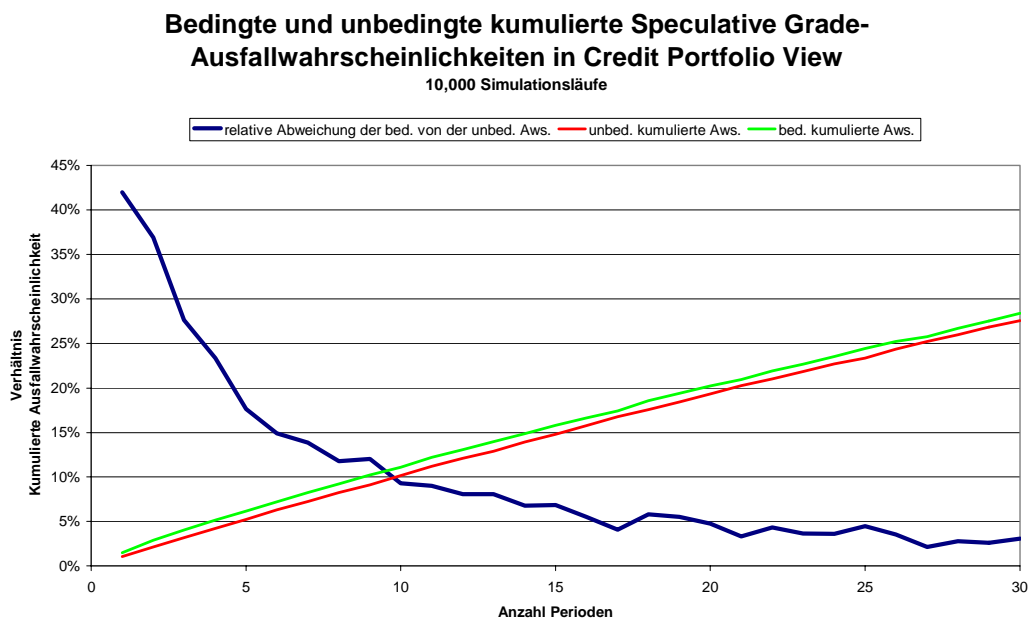
Rating	Standard and Poor's kumulierte 10-Jahres- Ausfallwahrscheinlich- keiten	Wilson's Ergebnisse	Verhältnis
AAA	0,51%	1,74%	341%
AA	0,60%	4,12%	687%
A	1,17%	9,58%	819%
BBB	2,89%	22,63%	783%
BB	11,80%	46,75%	396%
B	31,85%	69,12%	217%
CCC	46,53%	83,58%	180%

Mit Ausnahme des AAA-Ratings sind die Abweichungen hier sogar noch ausgeprägter. Im Schnitt sind Wilson's mit Credit Portfolio View erzielte Resultate 4,98 mal so groß wie die von Standard and Poor's. Zum Teil scheint dieses Ergebnis auf die Transformation der Speculative Grade-Ausfallwahrscheinlichkeiten in ratingspezifische Ausfallwahrscheinlichkeiten in Schritt 3 des Modells zurückzuführen sein. Abbildung 13 vergleicht die bedingten und unbedingten n-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten nach einer schweren Krise für gepoolte Speculative Grade-Firmen (also ohne Schritt 3). Trotz der starken Persistenz von Schocks in Credit Portfolio View³³ ist die auf den Schock bedingte 10-Jahres-Ausfallwahrscheinlichkeit nur etwa 10% größer als die unbedingte. Dies ist wesentlich weniger als die in Tabelle 2 und Tabelle 3 für die ratingspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten konstatierten Abweichungen, obwohl für die Ergebnisse in den Tabellen kein besonderer makroökonomischer Schock angenommen werden konnte.

³² Vgl. Standard and Poor's (2001), p. 16.

³³ Vgl. Abbildung 2 oben. Der Prozess und das Krisenszenario, dass für die Analyse in Abbildung 13 verwendet wurde, ist dasselbe, das in Fußnote 17 beschrieben wurde.

Abbildung 13



Fazit

Wilson beabsichtigte das Ausfallverhalten von Firmen und makroökonomische Risikofaktoren empirisch miteinander in Beziehung zu setzen. Die Analyse hat jedoch gezeigt, dass die Verbindung in Credit Portfolio View eher locker und sehr indirekt hergestellt wird. In jedem einzelnen von mehreren Modellierungsschritten traten zudem multiple Probleme und in ihrer Größe und Richtung nicht abschätzbare Fehler auf. Credit Portfolio View erfüllt damit nicht die selbstgestellte Aufgabe und trägt eher zusätzliche Unsicherheit zur Kreditrisikoanalyse bei als Erklärungspotenzial.

Credit Portfolio View war der erste Anfang einer Erklärung des Zusammenhangs von Ausfallwahrscheinlichkeiten und makroökonomischen Einflüssen. Obwohl einige Schwierigkeiten des Modells gemildert werden könnten, bleiben allerdings viele gravierende Defizite seiner Architektur bestehen, so dass ein Neuanfang für die Weiterentwicklung am vielversprechendsten zu sein scheint.

Kontakt:

Uwe Wehrspohn

Universität Heidelberg
Alfred Weber Institut
Grabengasse 14
69117 Heidelberg
Tel.: ++49.173.66 18 784

Center for Risk & Evaluation
GmbH & Co. KG
Berwanger Straße 4
75031 Eppingen
Email: wehrspohn@risk-and-evaluation.com

Weitere Unterlagen finden Sie unter <http://www.risk-and-evaluation.com>.

Literatur:

Tobias Bär (2000): "Predicting business failure rates: empirical macroeconomic models for 16 German industries," Working Paper, McKinsey & Co.

Jongwoo Kim (1999): "A way to condition the transition matrix on wind," Working Paper, Riskmetrics Group

McKinsey & Company (1999): "Credit Portfolio View", Technische Dokumentation

Susanne Niethen (2001): "Korrelationskonzepte zur Quantifizierung von Kreditausfallrisiken"

Standard and Poor's (2001): "Ratings performance 2000"

Thomas C. Wilson (1997a): "Portfolio credit risk (I)," *Risk* 9.9, pp. 111-117

Thomas C. Wilson (1997b): "Portfolio credit risk (II)," *Risk* 9.10, pp. 56-62

Thomas C. Wilson (1997c): "Measuring and managing credit portfolio risk – Part 1: Modelling Systemic default risk," *The Journal of Lending and Credit Risk Management*, reprint

Thomas C. Wilson (1997d): "Measuring and managing credit portfolio risk – Part 1: Portfolio loss distributions," *The Journal of Lending and Credit Risk Management*, reprint

Thomas C. Wilson (1998): "Portfolio credit risk," *FRBNY Economic Policy Review*, reprint