

Möglichkeiten und Grenzen der mathematischen Schadenmodellierung^{*}

Von Dietmar Pfeifer, Oldenburg

Inhaltsübersicht

1. Theoretische Überlegungen
 - 1.1 Generelle Aspekte der Modellbildung
 - 1.2 Univariate Verteilungsmodelle
 - 1.3 Multivariate Verteilungsmodelle
2. Praktische Überlegungen
 - 2.1 US-Hurricanes
 - 2.2 Sturmschäden in Europa
 - 2.3 Abhängige Gefahren
3. Resümee und Ausblick

1. Theoretische Überlegungen

Für einen Versicherungsmathematiker gleich welcher Couleur – sei es der wissenschaftlich orientierte Hochschullehrer oder der praktisch arbeitende Aktuar – gehören mathematische Modelle zum täglichen Handwerkszeug und bilden damit ein unverzichtbares Hilfsmittel für die Bearbeitung von höchst unterschiedlichen Aufgabenfeldern. Lassen wir dazu einmal zwei ganz unterschiedliche Quellen sprechen:

„Aus dem Gesagten wird deutlich, dass es [in diesem Buch] ständig um *Modelle* geht. Genauer gesagt geht es darum, zu jeder aus der Praxis kommenden Fragestellung das geeignetste – oder wenigstens ein geeignetes – Modell zu finden. Ein Modell ist geeignet, wenn es die für die Fragestellung wesentlichen Aspekte der Realität möglichst genau abbildet und dabei noch so einfach bleibt, dass die Fragestellung mit erträglichem Aufwand innerhalb des Modells beantwortet werden kann. Wenn das Modell geeignet ist, ist seine Antwort auch relevant für die Praxis.“¹

^{*} Erweiterte Fassung eines Vortrags auf der Jahrestagung des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft am 19. März in Düsseldorf.

¹ Mack, Th.: Schadenversicherungsmathematik. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, 2. Aufl., VVW Karlsruhe 2002, S.21 f.

„Wo die Versicherungssumme so groß ist, dass eine Rückversicherung Sinn macht, sollte man geeignete Schadenhöhenverteilungen konstruieren. Diese sollten möglichst auf einer Kombination aus eigenen Daten und Industrie-Erfahrung beruhen. Aus Sicht der Rückversicherung sind hierbei vor allem die Großschäden besonders wichtig. ... Schließlich sollte man im Auge behalten, dass die verfügbare Information auf Daten aus der Vergangenheit beruht. Es ist daher notwendig, geeignete Modellanpassungen vorzunehmen, insbesondere in Bezug auf ökonomische, soziale oder technologische Veränderungen, auch wenn solche Anpassungen häufig schwierig zu quantifizieren sind.“²

In diesem Beitrag sollen einige neuere Entwicklungsansätze zum Thema „Schadenmodellierung“ vor dem Hintergrund ihrer Praxisrelevanz („Möglichkeiten“) und Sinnhaftigkeit („Grenzen“) diskutiert werden.³ Die theoretischen Überlegungen im ersten Teil werden im zweiten Teil anhand konkreter Beispiele aus dem Bereich der Elementargefahren verdeutlicht.

1.1 Generelle Aspekte der Modellbildung

Die schon oben angesprochenen vielfältigen Einsatzmöglichkeiten mathematischer Modelle in der Praxis begründen sich durch aktuarielle Aufgaben mit unterschiedlicher Zielsetzung und unterschiedlichen Ansprüchen z.B. in den folgenden, teilweise neuartigen Bereichen:

- Tarifierung (Produktentwicklung und -gestaltung)
- Exposure Rating (Solvabilität, VaR, Risikoteilung)
- IRM (Integrated Risk Management)
- DFA (Dynamic Financial Analysis)
- Bewertung von geophysikalischen Softwaremodellen (AIR,⁴ EQECAT, RMS⁵)
- Szenarien mit ungesicherter Datengrundlage (Terrorrisiken, teilweise Naturkatastrophen)

² Übersetzt aus: *Hart, D.G., Buchannan, R.A., Howe, B.A.: Actuarial Practice of General Insurance*, Institute of Actuaries of Australia, Sydney 1996.

³ Vgl. *Disch, B.: Über Wahrheit und Richtigkeit aktuarieller Modelle*. *Der Aktuar* 9 (2003), Heft 1, 26 – 30. Der Autor setzt sich kritisch-konstruktiv mit einer allzu leichtfertigen „Modellgläubigkeit“ auseinander, wobei auch philosophische Aspekte eine zentrale Rolle spielen. Nach Disch sind folgende sechs Kriterien bei der Modellierung wichtig: Einfachheit – Benutzungssicherheit – Prüfbarkeit – Adaptionfähigkeit – Vollständigkeit – Kommunikationsfähigkeit (a.a.O. S. 28).

⁴ *Applied Insurance Research*

⁵ *Risk Management Solutions*

Der eigentliche Modellierungsprozess kann dabei je nach Aufgabenstellung und Anforderung sehr komplex sein und lässt sich prinzipiell gedanklich in folgende Einzelschritte zerlegen:⁶

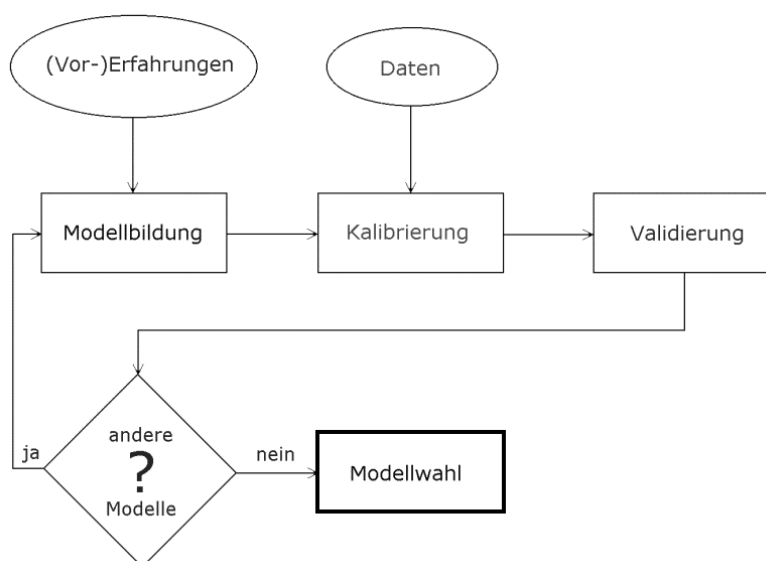


Abbildung 1: Modellbildungskreislauf

Eine außerordentlich wichtige Rolle in diesem Modellbildungsprozess spielt naturgemäß der Bereich der vorhandenen Daten. Während etwa in der Personen-, speziell der Lebens- und Krankenversicherung aufgrund demographischer Erhebungen oder genügend großer Versicherungsbestände entsprechende Informationen in Form von Sterbetafeln oder Kopfschadenprofilen zur Verfügung stehen, für die weder Praxisrelevanz noch Sinnhaftigkeit ernsthaft in Frage stehen, gestaltet sich das Datenproblem im Bereich der Sachversicherung schon erheblich schwieriger. Dies gilt in besonderem Maße für den Bereich der (großen) Elementarschäden, die sich einerseits durch eine gewisse Seltenheit des Auftretens auszeichnen, andererseits aber auch durch Gesamtschadenhöhen, die durchaus volkswirtschaftliche Bedeutung erreichen können, wie etwa die erheblichen Sturm- und Überschwemmungsschäden gerade des letzten Jahrzehnts in den USA und Europa eindrucksvoll belegen.^{7,8,9,10,11}

⁶ Nach Klugman, A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.: Loss Models. Wiley, N.Y. 1998, S. 2.

⁷ Vgl. Berz, G.: Naturkatastrophen an der Wende zum nächsten Jahrhundert – Trends, Schadenpotentiale und Handlungsoptionen der Versicherungswirtschaft. ZVersWiss (1999), 427 – 442.

⁸ Vgl. Jahn, A.: Die Berücksichtigung klimatisch bedingter Veränderungen der Sturmaktivität in den Entscheidungsprozessen deutscher Erstversicherer. ZVersWiss (2001), 389 – 444.

⁹ Vgl. Pohlhausen, R.: Gedanken zur Überschwemmungsversicherung in Deutschland. ZVersWiss (1999), 457 – 467.

¹⁰ Vgl. Schäfer, F.: Die Zunahme von Naturkatastrophen. Herausforderung für Gesellschaft und Versicherungswirtschaft. VVW Karlsruhe 1998.

¹¹ Vgl. Broggi, M.F., Roch, P.: Lothar. Der Orkan 1999. Ereignisanalyse. Eidgenössische Forschungsanstalt WSL, Birmensdorf, und Bundesamt für Umwelt, Wald und Landschaft BUWAL, Bern, Schweiz 2001.

Waren traditionell in den genannten Bereichen noch überwiegend einfache ein- oder zumindest niedrigdimensionale Modelle die Regel (z.B. für verbundene Leben oder im klassischen Ansatz für die kollektive Risikotheorie), sind mit dem Aufkommen moderner Methoden des Risikomanagements¹² wie IRM und DFA¹³ ganz andere Ansprüche zu bedienen. Hier sind sehr komplexe Unternehmensstrukturen mit ihren diversen finanziellen Verflechtungen in geeignete Modelle so abzubilden, dass mit erträglichem Rechenaufwand Prognosen für die Geschäftsentwicklung unter verschiedenen Managementstrategien möglich und damit als Entscheidungsgrundlage für Steuerungsprozesse verwendbar werden.¹⁴ Dies betrifft neben der Schadenseite insbesondere auch Anlagen auf dem Kapitalmarkt oder Instrumente des Alternativen Risikotransfers. Neben den üblichen univariaten statistischen Verteilungen für die einzelnen Risiken stehen hier vor allem die unterschiedlichen gegenseitigen Abhängigkeitsstrukturen im Vordergrund, die selbst bei hinreichend umfangreichem Datenmaterial nur schwer modellmäßig abzubilden sind,¹⁵ weil die Dimensionalität der Daten in der Regel hoch ist.

Mathematische Modelle spielen in neuerer Zeit auch im Bereich der großen geophysikalischen Softwareprodukte, etwa von Applied Insurance Research, EQECAT oder Risk Management Solutions, eine erhebliche Rolle, auch wenn der typische Anwender – in erster Linie Rückversicherer und Rückversicherungsmakler – in diese Strukturen aus firmenpolitischen Gründen keinen wirklichen mathematischen Einblick bekommt.^{16,17,18} Diese Produkte zeichnen sich dadurch aus, dass sie auf der Basis historischer Naturereignisse wie Stürme, Überschwemmungen oder Erdbeben den geophysikalischen Entstehungsprozess von Naturkatastrophen¹⁹ mit stochastischen Variationen simulativ nachbilden und die so *in vitro* entstehenden Naturereignisse auf konkrete Versicherungs-Portfolios applizierbar machen, um aus der daraus resultierenden großen Zahl synthetischer Schadendaten wiederum mit statistischen Methoden Aussagen über zukünftige Gefährdungspotenziale erhalten zu können.

¹² Vgl. *Wagner, F.*: Risk Management im Erstversicherungsunternehmen. Modelle, Strategien, Ziele, Mittel. VVW Karlsruhe 2000.

¹³ Vgl. *Steel, M.*: Integrated Simulation Techniques. In: Alternative Risk Strategies, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 533 – 543.

¹⁴ Vgl. *Lohse, B.*: Risikomanagement in Dienstleistungsunternehmen – ein integratives Modell unter Berücksichtigung des KonTraG. VVW Karlsruhe 2002, insbesondere S. 250 ff.

¹⁵ Vgl. *Blum, P., Dias, A., Embrechts, P.*: The ART of Dependence Modelling: The Latest Advances in Correlation Analysis. In: Alternative Risk Strategies, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 339 – 356.

¹⁶ Vgl. *Müller, E.*: Naturkatastrophen und Aggregatkontrolle: Nutzen und Grenzen computergestützter Simulationsmodelle. VVW Karlsruhe 1995.

¹⁷ Vgl. *Clark, K.M.*: Current and Potential Impact of Hurricane Variability on the Insurance Industry. In: Diaz, H.F., Pulwarty, R.S. (Eds.): Hurricanes. Climate and Socioeconomic Impacts. Springer, N.Y. 1997, 273 – 283.

¹⁸ Vgl. *Khater, M., Kuzak, D.E.*: Natural Catastrophe Loss Modelling. In: Alternative Risk Strategies, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 271 – 299.

¹⁹ Vgl. *Plate, E.J., Merz, B.* (Hrsg.): Naturkatastrophen. Ursachen, Auswirkungen, Vorsorge. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 2001.

Besonders wichtig werden mathematische Modelle als mehr oder weniger rein synthetische Werkzeuge dann, wenn keine oder nur extrem wenige oder auf die aktuell betrachtete Situation nicht übertragbare Schadendaten vorliegen. Dies spielt in jüngster Zeit unter dem Eindruck der WTC-Katastrophe z.B. bei der Einschätzung von Terror-Risiken eine zunehmende Rolle,^{20,21} aber auch bei der Einschätzung von Naturgefahren wie Erdbeben in Gebieten, in denen zwar aufgrund der geologischen Gegebenheiten ein latentes Gefährdungspotenzial besteht, aber noch keine konkreten Schäden ausgelöst wurden.^{22,23}

Schließlich soll noch auf einige andere problematische Aspekte von Daten bei der mathematischen Modellierung hingewiesen werden. In der Regel kann man nämlich nicht davon ausgehen, dass die Situationen oder Anlässe, zu denen Daten erhoben oder archiviert werden, zeitlich stabil oder vergleichbar bleiben. Stichworte in diesem Zusammenhang sind etwa:

- Trendbehaftung (ökonomisch, klimatisch)
- Strukturbrüche (Mergers & Acquisitions, Aufgabe / Neueinführung von Geschäftsfeldern)
- fehlende Daten (zeitliche Lücken, Datenverlust)
- technische Fehler (Eingabefehler, Konvertierungsfehler)

Daten müssen also entweder vor ihrer Verwendung in mathematischen Modellen geeignet gefiltert bzw. adaptiert werden, um nicht zusätzliche systematische Fehlerquellen zu erzeugen, oder die Modelle sind von vornherein so anzulegen, dass sie zumindest einige der genannten Aspekte in Form geeigneter Parameter mit berücksichtigen. Im Bereich der Lebensversicherung geschieht das z.B. systematisch durch Verwendung von Trendfunktionen zur Berücksichtigung der Alterungsverschiebung.²⁴ Verbreitete Verfahren sind in diesem Zusammenhang außer der üblichen Trendbereinigung (linear, exponentiell, ...) vor allem in der Schadenversicherungsmathematik auch neuere Verfahren der sog. *Explorativen Datenanalyse*,²⁵ etwa zur Entmischung von Verteilungen (Clusteranalyse, MDS, ...),^{26,27} deren Bedeu-

²⁰ Vgl. Koller, G.: Risk Modeling for Determining Value and Decision Making. Chapman & Hall, London 2000, Chapter 2.

²¹ Vgl. Woo, G.: Quantifying Insurance Terrorism Risk. In: Alternative Risk Strategies, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 301 – 318.

²² Vgl. Woo, G.: The Mathematics of Natural Catastrophes. Imperial College Press, London 1999.

²³ Vgl. Müller, E.: a.a.O., S. 9.

²⁴ Vgl. Milbrodt, H., Helbig, M.: Mathematische Methoden der Personenversicherung. De Gruyter, Berlin 1999.

²⁵ Vgl. Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W., Weiber, R.: Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung. 9. Aufl., Springer, Berlin 2000.

²⁶ Vgl. Führer, A.: Entwicklung eines Prämienmodells für die Warenkreditversicherung. VVW Karlsruhe 2001.

²⁷ Vgl. Wagner, F.: a.a.O., S. 209 ff.

tung insbesondere für die Analyse komplexerer Portfolios, aber auch bei der Berücksichtigung aktueller gesetzlicher Vorgaben auf nationaler (Stichwort: KonTraG^{28,29}) und internationaler Ebene (Stichwort: Basel II³⁰) in Zukunft weiter zunehmen dürfte.

1.2 Univariate Verteilungsmodelle

Eine typische Aufgabe für Aktuarien im Bereich der Nicht-Lebensversicherung besteht in der Anpassung geeigneter statistischer Verteilungen an Schadendaten eines gegebenen Portfolios.^{31,32} Wenn die Daten eindimensional sind, handelt es sich hier um sog. *univariate* Modelle. Zu diesem eher klassischen Themenkreis existiert eine Fülle an Literatur^{33,34,35} sowie ein umfangreiches Angebot kommerzieller Software, mit der solche Anpassungen größtenteils automatisiert durchgeführt werden können. Allerdings verbirgt sich hierin die große Gefahr, dass eine Modellwahl letztlich aufgrund rein rechnerischer Aspekte getroffen wird, ohne dass weitere systematische Betrachtungen auch mathematischer Art ins Kalkül gezogen werden. Ein besonders kritisches Problem besteht dabei darin, dass praktisch alle statistischen Verteilungsanpassungen im Bereich der beobachteten Daten eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis zeigen, jedoch ganz erhebliche Abweichungen in den einzelnen Modellen auftreten (können) in Bereichen, in denen keine oder nur sehr wenige Daten vorliegen. Dies betrifft regelmäßig den sog. *Großschadenbereich*, der insbesondere für die Rückversicherung von vitalem Interesse ist und vor allem den schon angesprochenen Bereich der Naturkatastrophen und Elementarschäden betrifft. Hier greifen theoretisch gut fundierte Resultate der *Ex-*

²⁸ Vgl. Lohse, B.: a.a.O.

²⁹ Vgl. v. Winter, R.: Risikomanagement und Interne Kontrollen beim Sachversicherer im Sinne des KonTraG. VVW Karlsruhe 2001.

³⁰ Vgl. Hofmann, G. (Hrsg.): Auf dem Weg zu Basel II. Konzepte, Modelle, Meinungen. Bankakademie Verlag, Frankfurt/M. 2001.

³¹ Vgl. Haindl, A.: Risk Management von Lieferisiken. VVW Karlsruhe 1996, S. 84 ff.

³² Vgl. Führer, A.: a.a.O., S. 78 ff.

³³ Vgl. Klugman, A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.: a.a.O., Appendix A: An Inventory of Continuous Distributions, S. 569 ff.

³⁴ Vgl. Law, A.M., Kelton, W.D.: Simulation Modeling & Analysis. McGraw-Hill, N.Y. 1991, Chapter 6: Selecting Input Probability Distributions, S. 325 ff.

³⁵ Vgl. Da Costa Lewis, N.: Market Risk Modelling. Applied Statistical Methods for Practitioners. Risk Books, London 2003.

tremwertstatistik,^{36,37,38} die sich auch in der praktischen Anwendung recht ordentlich bewährt haben.^{39,40,41}

Die nachfolgende Liste von Verteilungen, die für Schadendaten sinnvollerweise auf die nicht-negativen reellen Zahlen, also den Bereich $x \geq 0$ konzentriert sind, zeigt eine Auswahl von Möglichkeiten, die in einigen Softwareprodukten standardmäßig angeboten werden.

Nr.	Name	Dichte ⁴²	Erwartungswert ⁴²
1	Fréchet (inverse Weibull)	$\alpha\beta^\alpha x^{-\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right\}$	$\beta\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \ (\alpha > 1)$
2	Pearson Typ V (inverse Gamma)	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} \exp\left\{-\frac{\beta}{x}\right\}$	$\frac{\beta}{\alpha-1} \ (\alpha > 1)$
3	Loglogistisch	$\frac{\alpha(x/\beta)^{\alpha-1}}{\beta\{1+(x/\beta)^\alpha\}^2}$	$\frac{\beta\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)} \ (\alpha > 1)$
4	Lognormal	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \beta)^2}{2\alpha^2}\right\}$	$\exp\left(\beta + \frac{\alpha^2}{2}\right)$
5	Gamma	$\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} \exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\}$	$\alpha\beta$
6	Weibull	$\alpha\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left\{-(x/\beta)^\alpha\right\}$	$\frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Tabelle 1

³⁶ Vgl. Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, Th.: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin 1997.

³⁷ Vgl. Reiss, R.D., Thomas, M.: Statistical Analysis of Extreme Values. With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. 2nd ed., Birkhäuser, Basel 2001.

³⁸ Vgl. Hipp, Ch.: Risikomanagement von Naturkatastrophen: helfen mathematische Methoden? ZVersWiss (1999), 443 – 456.

³⁹ Vgl. Pfeifer, D.: Wissenschaftliches Consulting im Rückversicherungsgeschäft: Modelle, Erfahrungen, Entwicklungen. Zeitschrift für Versicherungswesen 21 (2000), 771 – 777.

⁴⁰ Vgl. Pfeifer, D.: Study 4: Extreme Value Theory in Actuarial Consulting: Windstorm Losses in Central Europe. In: Reiss, R.D., Thomas, M.: Statistical Analysis of Extreme Values. With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. 2nd ed., Birkhäuser, Basel 2001, 373 – 378.

⁴¹ Vgl. Rootzén, H., Tajvidi, N.: Extreme value statistics and windstorm losses: a case study. Scand. Act. Journal (1997), 70 – 94.

⁴² Γ bezeichnet hier die Euler'sche Gammafunktion, α einen Form- und β einen Skalenparameter.

Die ersten drei Verteilungen gehören in Bezug auf die ihnen zurechenbaren Großschäden in die Kategorie der Extremwertverteilungen – zu denen insbesondere die Fréchet-Verteilung selbst zu zählen ist. Für $x \rightarrow \infty$ unterscheiden sich die Dichten der Fréchet- und der Loglogistischen Verteilung asymptotisch qualitativ nicht voneinander, die Pearson Typ V - Verteilung und die Fréchet-Verteilung stimmen für den Formparameter $\alpha = 1$ überein. Solche Verteilungen sind „gefährlich“, denn sie produzieren zwar mit einer nur geringen Wahrscheinlichkeit Großschäden, diese liegen aber in der Regel sehr weit vom Zentrum der Verteilung entfernt – je weniger sich α von 1 unterscheidet, umso weiter. Die Gamma- und Weibullverteilung verhalten sich dagegen „gutartig“, ihre Großschäden bleiben mathematisch und versicherungstechnisch kalkulierbar. Die Lognormalverteilung nimmt zwischen diesen Extremen eine mittlere Stellung ein. Die nachfolgende Graphik zeigt exemplarisch das Ergebnis einer Verteilungsanpassung mit der Maximum-Likelihood-Methode^{43,44} für einen fiktiven Datensatz aus 50 „Schäden“, die mit einem Monte-Carlo-Verfahren⁴⁵ aus einer Loglogistischen Verteilung mit den Parametern $\alpha = 2$ und $\beta = 100$ gezogen wurden, zusammen mit dem zugehörigen Histogramm; die Nummerierung der Dichten erfolgte in Anlehnung an Tabelle 1.

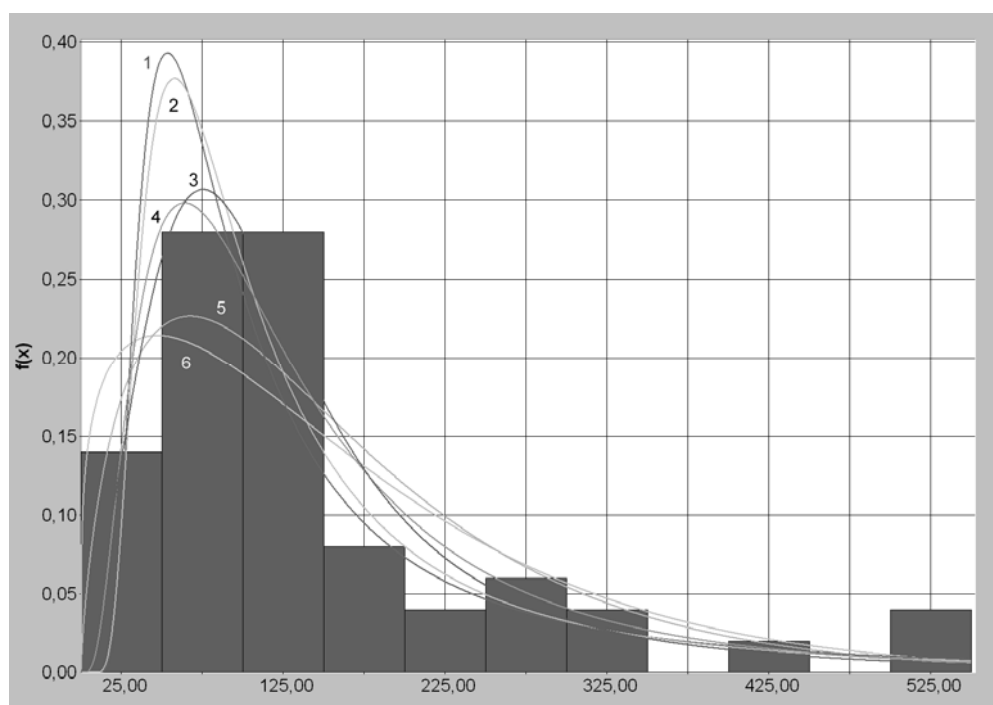


Abbildung 2: Vergleich angepasster Dichtefunktionen

⁴³ Vgl. Law, A.M., Kelton, W.D.: a.a.O., S. 367 ff.

⁴⁴ Vgl. Klugman, A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.: a.a.O., S. 56 ff.

⁴⁵ Vgl. Frey, H.C.: Monte Carlo Simulation. Quantitative Risikoanalyse für die Versicherungsindustrie. Gerling Akademie Verlag, München 2001.

Die unterschiedlichen Auswirkungen dieser Verteilungsanpassungen sieht man am besten in der folgenden Tabelle, die die (geschätzten) Schadenhöhen für verschiedene Wiederkehrperioden T enthält, die mit den Überschreitungswahrscheinlichkeiten q über die Beziehung $T = 1/q$ bzw. $q = 1/T$ gekoppelt sind, wenn man sich jeden Schaden als einem Versicherungsjahr zuordnet denkt. In der Spalte „theoretisch“ sind die Schadenhöhen eingetragen, die aus der Modellvorgabe (Loglogistische Verteilung) folgen.

q	T	Fréchet	Pearson Typ V	Loglogistisch	theoretisch	Lognormal	Gamma	Weibull
0,75	1,333	62,857	65,097	70,241	57,735	69,086	70,749	63,718
0,5	2	104,180	105,477	113,565	100,000	116,486	130,294	129,073
0,25	4	197,777	186,688	183,612	173,205	196,407	217,223	225,156
0,1	10	411,304	343,107	296,864	300,000	314,311	321,906	338,357
0,05	20	695,091	519,893	411,598	435,890	416,453	397,421	417,944
0,025	40	1162,943	772,380	563,708	624,500	531,572	471,051	493,945
0,01	100	2280,559	1280,646	847,193	994,987	706,002	566,417	590,233
0,005	200	3786,776	1862,098	1149,705	1410,674	856,498	637,476	660,548
0,001	1000	12257,712	4376,359	2328,223	3160,696	1275,735	799,967	817,295

Tabelle 2

Beispielsweise liegt der geschätzte 100-Jahres-Schaden je nach Modellwahl zwischen 566,417 (Gamma-Verteilung) und 2280,559 (Fréchet-Verteilung), einem Wert, der fast viermal so groß ist! Aber auch der direkte Vergleich zwischen den theoretischen und den mit dem „richtigen“ Modell geschätzten Werten zeigt deutliche Diskrepanzen, im Bereich der 200- bis 1000-Jahres-Schäden immerhin eine Unterschätzung in einer Größenordnung von bis zu 25%. Auch die Art des Schätzverfahrens selbst⁴⁶ hat einen wesentlichen Einfluss auf die Güte der Schätzwerte. Mit einem alternativen Verfahren, das auf einer Anpassung an einen optimierten Q-Q-Plot beruht,⁴⁷ erhält man beispielsweise für die Fréchet-Verteilung folgende Vergleichsschätzung, die erheblich näher an den theoretischen Werten liegt.

⁴⁶ Vgl. Klugman, A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.: a.a.O., S. 39 ff.

⁴⁷ Vgl. Beirlant, J., Teugels, J.L., Vynckier, P.: Practical Analysis of Extreme Values. Leuven University Press 1996. Die für den Beispieldatensatz verwendete Methode wurde vom Autor in Zusammenarbeit mit AON Jauch & Hübener, Hamburg entwickelt.

q	T	Fréchet	Fréchet alternativ	Loglogistisch	theoretisch
0,1	10	411,304	332,099	296,864	300,000
0,05	20	695,091	508,558	411,598	435,890
0,025	40	1162,943	772,452	563,708	624,500
0,01	100	2280,559	1334,789	847,193	994,987
0,005	200	3786,776	2014,986	1149,705	1410,674
0,001	1000	12257,712	5231,034	2328,223	3160,696

Tabelle 3

Die obigen Ausführungen machen deutlich, dass selbst bei der vermeintlich „einfachen“ Aufgabe einer Verteilungsanpassung in univariaten Modellen erhebliche Vorsicht geboten ist, vor allem dann, wenn Schadendaten nur über wenige Jahre oder lückenhaft vorliegen. Aber sogar wenn ein Verteilungsmodell für den Großschadenbereich als geeignet identifiziert werden kann – etwa im Sinne einer Extremwertverteilung – bleibt doch häufig die Frage, ob auch der Kleinschadenbereich richtig abgebildet wird, z.B. wenn im Rahmen einer DFA die gesamte Verteilung für die Schadenmodellierung benötigt wird. Wie man bereits der Abbildung 2 entnehmen kann, unterscheiden sich die Modelle durchaus grundlegend in diesem Bereich, selbst wenn sie dieselbe Asymptotik für große Beobachtungen besitzen: so sind etwa in der Nähe des Nullpunkts alle Funktionsverläufe für die Dichten von einer senkrechten Tangente über einen linearen Anstieg bis hin zu einer waagerechten Tangente denkbar und möglich. Die in der Rückversicherung so populäre *Pareto-Verteilung*,⁴⁸ die zwar das asymptotische Verhalten einer Fréchet- oder Loglogistischen Verteilung besitzt und damit für die Beurteilung von Großschäden oft ausreichend gut geeignet ist, versagt aber meist zur Beschreibung von Kleinschäden völlig, da ihr charakteristisches Merkmal eine monoton fallende Dichte mit positivem Achsenabschnitt ist, gruppierte Daten konkreter Portfolios aber in der Regel eher ein Verhalten wie das Histogramm in Abbildung 2 aufweisen. Die folgende Graphik zeigt die obige Verteilungsanpassung in diesem Bereich noch einmal genauer aufgelöst.

⁴⁸ Vgl. Hipp, Ch.: a.a.O., S. 447 ff.

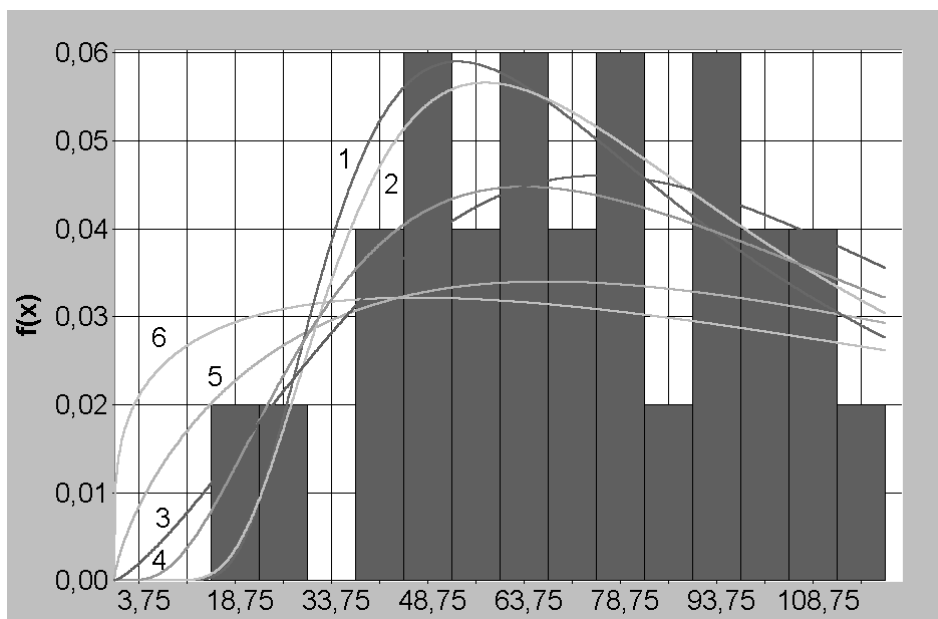


Abbildung 3: Verteilungsanpassung im Kleinschadenbereich

Es ist deutlich ersichtlich, dass die Gamma- und Weibullverteilung (Nr. 5 und 6) hier das Histogramm nicht gut wiedergeben, hingegen die ersten vier Verteilungen mit flach ansteigenden Dichten die Datensituation akzeptabel reproduzieren.

Eine Schadenmodellierung, die sowohl Klein- als auch Großschäden gleich gut erfasst, erfordert also ein gewisses mathematisches Geschick, das sich jedenfalls nicht durch routinemäßige Automatismen ohne weiteres ersetzen lässt. Treten im Klein- und Großschadenbereich größere Diskrepanzen zu den Daten unter einem (einzigem) Verteilungsmodell auf, kann alternativ auch ein Mischungsmodell⁴⁹ in Betracht gezogen werden. Allerdings ist auch hier Vorsicht geboten, da Modelle mit „zu vielen“ Parametern immer besser an gegebene Daten angepasst werden können als solche mit wenigen Parametern (vgl. das Anfangszitat von Mack).

⁴⁹ Vgl. *Führer, A.*: a.a.O., S. 85ff. Der dort betrachtete Datensatz aus ca. 100000 Einzelschäden (!) lässt sich fast perfekt in zwei lognormalverteilte Komponenten zerlegen.

1.3 Multivariate Verteilungsmodelle

Die im vorherigen Abschnitt aufgezeigten potenziellen Schwierigkeiten bei der Wahl geeigneter Modelle und Schätzverfahren für die dort zugrundeliegenden Parameter sowie die Extrapolation in nicht beobachtete Datenbereiche vervielfachen sich naturgemäß dann, wenn neben den statistischen Verteilungen für die einzelnen Gefahren oder Risiken noch die gegenseitigen stochastischen Abhängigkeiten ins Spiel kommen. Solche Abhängigkeiten entstehen im Versicherungswesen auf natürliche Weise etwa zwischen ähnlichen Sparten (z.B. Hausrat- und Gebäudeversicherung), aufgrund räumlicher Kohärenz (z.B. bei Hochwasserschäden) oder gemeinsamer Trigger (z.B. in der Gebäudeversicherung für Sturm- und/oder Hagelschäden). Lange Zeit wurde in Ermangelung anderer Konzepte – zumindest auf Seiten der Anwender – eine solche Abhängigkeit mit „Korrelation“ gleichgesetzt, zumal die ökonomische Theorie der Kapitalmärkte (Stichwort: CAPM – Capital Asset Pricing Model) strukturell linear ist und damit in Bezug auf die Modellierung des Zufalls der Welt der Normalverteilung offensteht.⁵⁰ Bekanntlich ist eine mehrdimensionale Normalverteilung – in Zeichen: $N(\mu, \Sigma)$ – charakterisiert durch ihren Erwartungswertvektor μ und ihre Varianz-Kovarianzmatrix $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, welche ihrerseits mit der Korrelationsmatrix $K = [\rho_{ij}]$ in Zusammenhang steht über die Beziehung $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}}}$. Die Angabe des Erwartungswertvektors μ sowie der paarweisen Korrelationen ρ_{ij} zwischen den Risiken i und j , zusammen mit deren Einzelvarianzen legt also unter Normalverteilungsannahme die gemeinsame Verteilung aller Risiken eindeutig fest.⁵¹ Außerdem ist die (mehrdimensionale) Normalverteilung abgeschlossen gegenüber linearen Transformationen, d.h. ist etwa X ein $N(\mu, \Sigma)$ -multivariat normalverteilter Vektor von Risiken und A eine Matrix, die so viele Spalten enthält wie die Dimension von X angibt, so ist auch der transformierte Vektor $Y = AX$ (Matrixprodukt) normalverteilt, mit einer $N(A\mu, A\Sigma A^r)$ -Verteilung.⁵² In jüngerer Zeit wird jedoch von verschiedenen Autoren immer wieder darauf hingewiesen, dass der Rückzug auf die „Korrelation“ trügerisch ist und nicht nur im Finanzsektor, sondern auch in versicherungstechnischen Anwendungen zu kras-

⁵⁰ Vgl. *Rasmussen, N.*: Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management. Palgrave MacMillan, N.Y. 2003.

⁵¹ Vgl. *Fahrmeir, L., Hamerle, A.*: Multivariate Statistische Verfahren. De Gruyter, Berlin 1984.

⁵² A^r bezeichnet hier die Transponierte der Matrix A .

sen Fehlern führen kann,^{53,54} vor allem dann, wenn eine Normalverteilungsannahme für die Einzelrisiken nicht gerechtfertigt ist. Insbesondere im Bereich der schon angesprochenen Großschäden ist die Betrachtung strukturell anderer Abhängigkeitsmaße als die Korrelation angezeigt und möglich.^{55,56,57} Dass auch ganz unterschiedlich strukturierte Risiken mit gleicher (Rand-)Verteilung dieselbe Korrelationen aufweisen können, ist in der Literatur bekannt;^{58,59} ein besonders extremes Beispiel zeigt die folgende Graphik.

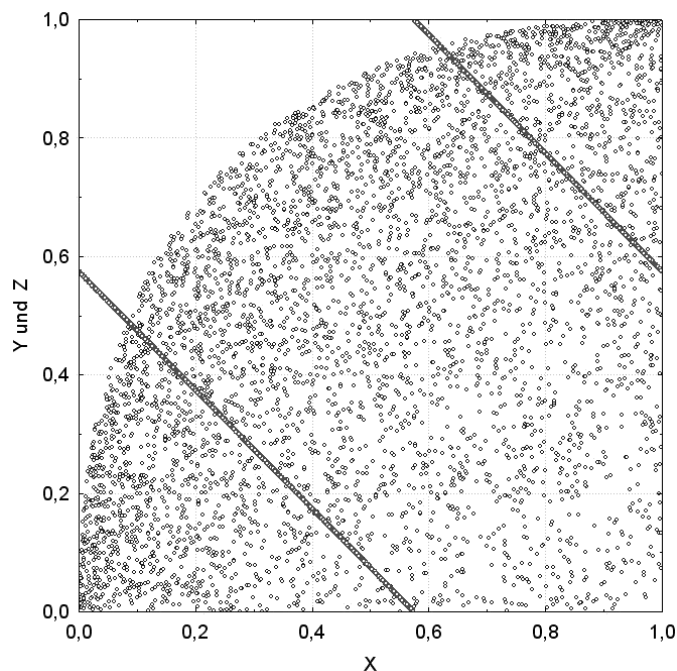


Abbildung 4: gleiche Korrelation, unterschiedliche Abhängigkeit

Die Risiken X , Y und Z wurden wie folgt aus Zufallszahlen U und V erzeugt, die über dem Intervall $[0,1]$ stetig gleichverteilt und stochastisch unabhängig sind:

$$\left. \begin{aligned} X &= (1-U)^2 \\ Y &= 1-(1-V)^2 \end{aligned} \right\} \text{ falls } U+V \leq 1$$

$$Z = \begin{cases} 1+c-X & \text{falls } X > c \\ c-X & \text{falls } X \leq c \end{cases} \quad \text{mit } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{30} = 0,57543\dots$$

⁵³ Vgl. Blum, P., Dias, A., Embrechts, P.: a.a.O.,

⁵⁴ Vgl. Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D.: Correlation: Pitfalls and Alternatives. In: Embrechts, P. (Ed.): Extremes and Integrated Risk Management. Risk Books, London 2000, 71 – 76.

⁵⁵ Vgl. Reiss, R.D., Thomas, M.: a.a.O., Chapter 8, S. 211 ff.

⁵⁶ Vgl. Embrechts, P., de Haan, L., Huang, X.: Modelling Multivariate Extremes. In: Embrechts, P. (Ed.): Extremes and Integrated Risk Management. Risk Books, London 2000, 59 – 67.

⁵⁷ Vgl. Blum, P., Dias, A., Embrechts, P.: a.a.O.

⁵⁸ Vgl. Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D.: a.a.O., S. 73.

⁵⁹ Vgl. Blum, P., Dias, A., Embrechts, P.: a.a.O., S. 343f.

Mit etwas Rechenaufwand⁶⁰ lässt sich zeigen, dass aufgrund obiger Konstruktion die Risiken X , Y und Z dann jeweils auch über dem Intervall $[0,1]$ stetig gleichverteilt, jedoch nicht mehr unabhängig sind. Für die Korrelationen erhält man durch Rechnung

$$\rho = \text{Korr}(X, Y) = \text{Korr}(X, Z) = \frac{7}{15} = 0,4\bar{6},$$

also denselben Wert. Wie Abbildung 4 mit der Simulation von jeweils 5037 Risiko-Paaren deutlich zeigt, bestehen aber erhebliche strukturelle Unterschiede zwischen (X, Y) und (X, Z) : während im ersten Fall bis auf einen kleinen Bereich das Quadrat flächig gefüllt wird, liegen die Paare (X, Z) auf zwei Geradenstücken, die überhaupt keine Fläche besitzen!

Welche Möglichkeiten gibt es nun, um das Problem stochastischer Abhängigkeiten allgemeiner mathematisch zu behandeln? Die Antwort liegt in dem Konzept der *Copula*,^{61,62} auf dem alle aktuell verfolgten, modernen Ansätze zur Modellierung multivariater Risiken fußen. Die Grundidee ist einfach und beruht auf einer geschickten Trennung der Randverteilungsproblematik von der Abhängigkeitsstruktur. Sind die n Einzelrisiken X_i nämlich stetig verteilt, so kann man diese durch Transformation mit der zugehörigen (Rand-)Verteilungsfunktion F_i in Zufallsgrößen $Y_i = F_i(X_i)$ überführen, die dadurch über dem Intervall $[0,1]$ stetig gleichverteilt sind. Die ursprüngliche Abhängigkeitsstruktur lässt sich dann eindeutig durch die gemeinsame Verteilungsfunktion C der Y_i rekonstruieren:

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

⁶⁰ Genauer handelt es sich bei den Verteilungen von X und Y um die bedingten Verteilungen von $(1 - U)^2$ und $1 - (1 - V)^2$ unter der Bedingung $U + V \leq 1$. Die Verteilung von Z bleibt auch bei beliebiger Wahl der Konstanten c im Intervall $(0,1)$ dieselbe, die hier getroffene Wahl stellt aber sicher, dass die Korrelationen zwischen X und Y und X und Z gleich sind.

⁶¹ Vgl. *Nelsen, R.B.*: An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics 139, Springer, N.Y. 1999.

⁶² Vgl. *Mari, D.D., Kotz, S.*: Correlation and Dependence. Imperial College Press, London 2001.

Die Verteilungsfunktion C der transformierten Risiken ist dann gerade die zugehörige Copula. Ihre wesentlichen Vorteile liegen auf der Hand:⁶³

- Die Copula hängt nicht von den Randverteilungen der Einzelrisiken ab.
- Die Copula charakterisiert bei Stetigkeit der Randverteilungen die gemeinsame Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken eindeutig.
- Die Copula ist invariant gegen alle monotonen Transformationen der Einzelrisiken, insbesondere nichtlineare.
- Paarweise Korrelationen zwischen den Einzelrisiken können über die Copula ausgedrückt werden, aber nicht umgekehrt.

Das Beispiel zu Abbildung 4 beschreibt gerade zwei solche Copulas; ihre analytische Form ist gegeben durch

$$C_1(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} (1 - \sqrt{1-y})(2\sqrt{x} + \sqrt{1-y} - 1), & \sqrt{1-y} \geq 1 - \sqrt{x} \\ x, & \sqrt{1-y} \leq 1 - \sqrt{x} \end{cases}$$

$$C_2(x, y) = P(X \leq x, Z \leq y) = \begin{cases} \max(x + y - c, 0), & x, y \leq c \\ x, & x \leq c, y > c \\ y, & y \leq c, x > c \\ \max(x + y - 1, c), & x, y > c \end{cases}$$

für $0 \leq x, y \leq 1$. Die folgende Graphik zeigt diese Funktionen in 3D-Darstellung:

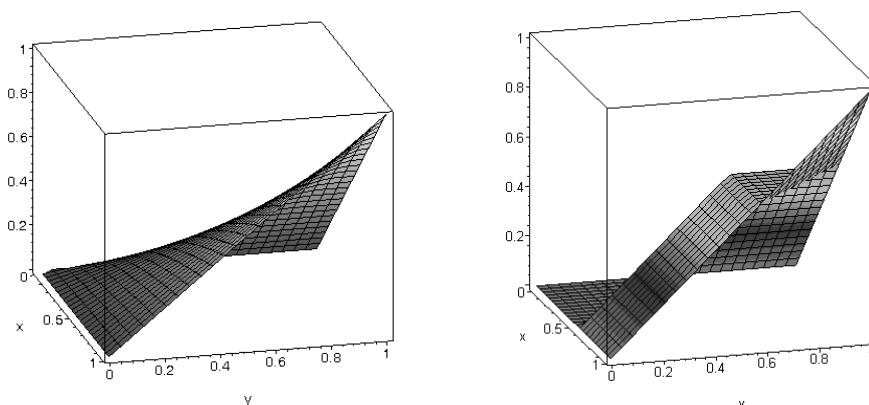


Abbildung 5: Verlauf der Copulas C_1 (links) und C_2 (rechts)

⁶³ Vgl. Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D.: Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: Dempster, M.A.H. (Ed.): Risk Management: Value at Risk and beyond. Cambridge University Press, Cambridge 2002, 176 – 223.

Aufgrund der zentralen Bedeutung der Normalverteilung ist die sog. *Gauß-Copula*⁶⁴ oder Φ -Copula (sowie die verwandte *t*-Copula) sehr verbreitet, insbesondere bei IRM und DFA, weil sie relativ leicht die Simulation auch komplexer (hochdimensionaler) Portfolios erlaubt. Sie entsteht folgendermaßen:

Bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der (eindimensionalen) Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ und betrachtet man einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ mit einer multivariaten $N(0, \Sigma)$ -Verteilung mit Varianzen $\sigma_{ii} = 1$ (d.h. Σ stimmt hier mit der Korrelationsmatrix R überein), so sind nach obigem auch die Zufallsgrößen $W_i = \Phi(Z_i)$ sämtlich stetig gleichverteilt über dem Intervall $[0,1]$. Identifiziert man nun die W_i mit den obigen Y_i , so erhält man gerade die Gauß-Copula. Alternativ kann man die Z_i auch direkt über $Z_i = \Phi^{-1}(F_i(X_i))$ erzeugen, um damit die Korrelationsmatrix $\hat{\Sigma}$ empirisch zu bestimmen.

Die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelrisiken wird damit indirekt durch eine Korrelationsmatrix, nämlich $\Sigma = R$, beschrieben. Für Simulationszwecke lassen sich Risiken mit Gauß-Copula in folgenden Schritten erzeugen:

- Zerlege die vorgegebene Matrix Σ in ein Matrixprodukt $\Sigma = AA^T$ (das ist mit Methoden der linearen Algebra möglich; Stichwort: Spektralzerlegung [\rightarrow Eigenwerte und Eigenvektoren])
- Erzeuge einen Zufallsvektor S aus n unabhängigen standard-normalverteilten Komponenten⁶⁵ S_1, \dots, S_n und transformiere diesen zu $Z = AS$
- Transformiere die so erhaltenen Komponenten Z_i zu $X_i = F_i^{-1}(\Phi(Z_i))$. Dies sind die gewünschten Zufallsgrößen mit den zu den F_i gehörigen vorgegebenen Randverteilungen und der Gauß-Copula als Abhängigkeitsstruktur.

Die einzige aufwändige Rechnung in dieser Prozedur ist die Zerlegung der Korrelationsmatrix Σ , die z.B. mit modernen Computer-Algebra-Systemen sehr effizient auch für größere Werte von n durchgeführt werden kann. In vielen Programmbibliotheken sind darüber hinaus

⁶⁴ Vgl. Vgl. Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D. (2002): a.a.O., S. 181ff.

⁶⁵ Hierzu gibt es zahlreiche Methoden, die einfachste ist die von Box und Muller, die allein mit den Funktionen *Logarithmus* und *Sinus* auskommt; vgl. Law, A.M., Kelton, W.D.: a.a.O., S. 490 ff.

Routinen in diversen Programmiersprachen hinterlegt, die entsprechendes leisten. Die Inversion der Verteilungsfunktionen F_i kann u.U. numerisch ebenfalls anspruchsvoll sein.

Für den Großschadenbereich lassen sich aufgrund theoretischer Überlegungen spezielle Copulas ableiten,^{66,67} von denen wir hier nur die Gumbel-Copula vorstellen wollen, weil sie ähnlich einfach zu handhaben ist wie die Gauß-Copula. Sie ist in der Grundform einparametrisch und gegeben durch

$$C(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ - \left[(-\ln x_1)^\lambda + (-\ln x_1)^\lambda + \dots + (-\ln x_n)^\lambda \right]^{1/\lambda} \right\} \text{ für } 0 < x_1, \dots, x_n < 1$$

mit einem Strukturparameter $\lambda > 0$. Für $\lambda = 1$ ist der Spezialfall stochastischer Unabhängigkeit mit enthalten. Sind die Randverteilungen vom Fréchet-Typ, lässt sich die gemeinsame Verteilungsfunktion sogar in geschlossener Form angeben:

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \exp \left(- \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta_i} \right)^{-\lambda \alpha_i} \right]^{1/\lambda} \right) \text{ für } x_1, \dots, x_n > 0,$$

wobei gemäß Tabelle 1 die α_i und β_i die Form- und Skalenparameter für die Randverteilungen bezeichnen. Die folgende Graphik zeigt die entsprechenden Verteilungsdichten für $n = 2$ mit $\alpha_i = \beta_i = 1$ und $\lambda = 3$ (links) im Vergleich zum Unabhängigkeitsfall ($\lambda = 1$, rechts).

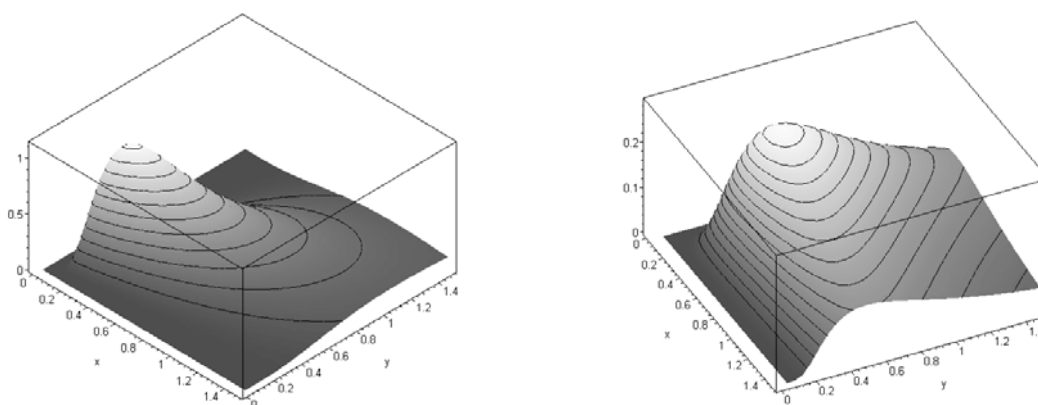


Abbildung 6: Dichten für Gumbel-Copula mit Fréchet-Randverteilungen

⁶⁶ Vgl. Reiss, R.D., Thomas, M.: a.a.O., S. 240ff.

⁶⁷ Vgl. Kotz, S., Nadarajah, S.: Extreme Value Distributions. Theory and Applications. Imperial College Press, London 2000.

Wie man deutlich erkennen kann, steigt hier erwartungsgemäß mit wachsendem Parameter λ die Tendenz zu simultanen Großschäden (Ausdehnung der Dichte in Richtung der Diagonale).

Multivariate Verteilungsmodelle mit „vielen“ Parametern – ähnlich der Gauß-Copula mit den paarweisen Korrelationen – sind zwar auch im Bereich der Extremwertverteilungen möglich,⁶⁸ werden aber mit wachsender Zahl der Dimensionen schnell sehr komplex.

Überhaupt gilt prinzipiell für die „Kunst“ multivariater Modellierung ähnliches wie für die univariate Modellierung. Allerdings liegen hier bisher nur wenige Erfahrungen aus der Praxis vor. Insbesondere ist das Problem, geeignete Copulas bzw. deren Parameter aus den Daten zu schätzen, noch nicht gut genug erforscht, es gibt aber bereits einige vielversprechende Ansätze.⁶⁹ Außerdem bleibt zu beachten, dass eine statistische Auswertung von Copulas in der Regel stark von der vorangehenden Transformation mit den – geschätzten! – Randverteilungsfunktionen beeinflusst wird.

2. Praktische Überlegungen

Dieser Teil des Beitrags ist einer Reihe von exemplarischen Auswertungen verschiedener konkreter Datensätze gewidmet, an denen einige der in Abschnitt 1 aufgezeigten Methoden verdeutlicht und verglichen werden können. Sie orientieren sich hauptsächlich an Ereignissen, die aus dem Bereich der Naturgefahren stammen, weil dort die Methoden der Extremwertstatistik besonders gut etabliert sind und auch ausreichend praktische Erfahrungen vorliegen. Außerdem sind die (im positiven Sinne) konkurrierenden geophysikalischen Softwareprodukte gerade auch in diesem Gebiet beheimatet.

⁶⁸ Vgl. *Kotz, S., Nadarajah, S.*: Extreme Value Distributions. Theory and Applications. Imperial College Press, London 2000, S. 118ff.

⁶⁹ Vgl. *Junker, M., May, A.*: Measurement of aggregate risk with copulas. Caesar preprint 021, Center of Advanced European Studies and Research, Bonn, Germany 2002.

2.1 US-Hurricanes

Es gibt aus Sicht der Versicherungsindustrie wohl kaum einen zweiten Bereich auf dieser Welt, der so gut in Theorie und Praxis aufgearbeitet wurde wie die regelmäßig wiederkehrenden, auf tropische Zyklone zurückgehenden großen Sturmereignisse und die daraus resultierenden Schäden im Südosten der USA.⁷⁰ Der über die Jahre hinweg beständige Zuwachs an Werten mit einem Schwerpunkt in Florida und der angrenzenden Golfregion hat inzwischen ein Gefährdungspotenzial aufgebaut, das auch volkswirtschaftlich bedeutsam geworden ist, wie die dramatischen Auswirkungen des Hurricanes Andrew aus dem Jahr 1992 mit einer versicherten Schadenssumme von ca. 16 Mrd. US \$ belegen. So haben denn auch einige der kommerziellen geophysikalischen Softwareanbieter wie AIR in diesem Bereich ihren Ursprung genommen.⁷¹

Wir wollen an dieser Stelle die in der Zeitschrift *Catastrophe Reinsurance Newsletter* (1993), No2, S. 8 wiedergegebene und öffentlich verfügbare Übersicht über die Hurricane-Ereignisse und deren versicherte Schäden in den Jahren von 1949 bis 1992 verwenden, um den in Abschnitt 1.1 diskutierten (univariaten) statistischen Ansatz mit ebenfalls publizierten Hochrechnungen von AIR zu vergleichen.

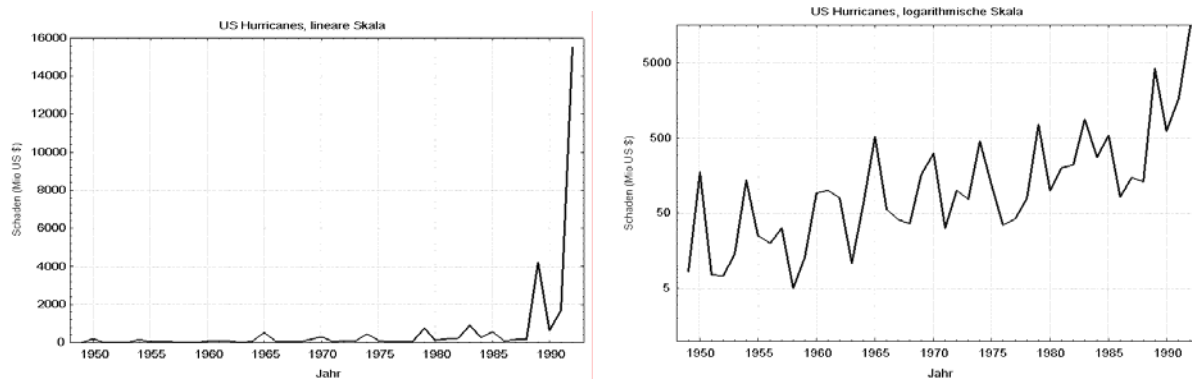


Abbildung 7: Hurricane-Schäden in verschiedenen Skalen

Stellt man die Zeitreihe einmal in einer linearen, einmal in einer logarithmischen Skala dar, so stellt man fest, dass sich die Schäden tendenziell exponentiell entwickelt haben. Die Daten wurde daher vor der statistischen Analyse entsprechend trendbereinigt, mit dem Bezugsjahr 1992. Interessant ist hier die Frage, ob man im Jahr 1991 (oder früher) in der Lage gewesen

⁷⁰ Vgl. Diaz, H.F., Pulwarty, R.S. (Eds.): Hurricanes. Climate and Socioeconomic Impacts. Springer, N.Y. 1997.

⁷¹ Vgl. Clark, K.M.: a.a.O., S. 275.

wäre, auf der bis dahin vorliegenden Datenbasis einen Großschaden, wie ihn Hurricane Andrew ein Jahr später verursacht hatte, realistisch einzuschätzen.

Wenden wir uns zunächst einer entsprechenden Analyse von AIR zu. Auf der Basis von 1000 geophysikalischen Simulationen *ohne* Berücksichtigung von Hurricane Andrew veröffentlichte K. Clark hierzu folgende Tabelle:⁷²

Schäden in Mio US \$ (ohne Andrew)	Geschätzte Überschreitungswahrscheinlichkeit	Geschätzte Wiederkehrperiode in Jahren
9500	0,05	20
13500	0,02	50
18200	0,01	100
20800	0,005	200
31400	0,002	500
39000	0,001	1000

Tabelle 4

Die folgende Graphik zeigt im Vergleich dazu das Ergebnis einer rein *statistischen* Software-Analyse unter Einbezug der sechs Verteilungstypen (Tabelle 1), die entsprechend ohne Hurricane Andrew durchgeführt wurde.

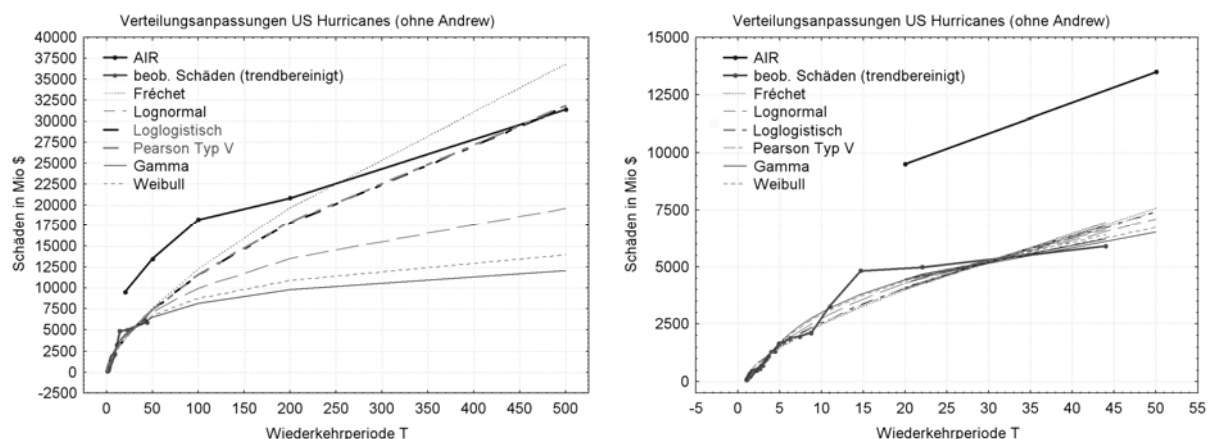


Abbildung 8: Verteilungsanpassungen US Hurricanes, verschiedene Auflösungen

⁷² Vgl. Clark, K.M.: a.a.O., S. 278.

Die „gefährlichen“ Verteilungen Fréchet, Pearson Typ V und Loglogistisch wurden durch das Programm als bestpassend gekennzeichnet; für Wiederkehrperioden ab 200 Jahren decken sich die geschätzten Schadenhöhen für diese Verteilungen auch weitgehend mit den Berechnungen von AIR. Die Lognormal-, Gamma- und Weibullverteilung fallen dagegen (erwartungsgemäß) deutlich ab. Auffällig ist, dass die von AIR berechneten Werte für kleine Wiederkehrperioden (20 bis 50 Jahre) deutlich über den historisch beobachteten liegen, während alle sechs statistischen Verteilungen in diesem Bereich die Datenlage fast gleich gut reproduzieren. Der von Hurricane Andrew verursachte versicherte Schaden entspricht nach AIR einer Wiederkehrperiode von ca. 80 Jahren, nach der statistischen Analyse einer von ca. 160 Jahren bei Zugrundelegung einer Fréchet-Verteilung.

Von Seiten der Anbieter geophysikalischer Software wird häufig das Argument vorgebracht, statistische Standardtechniken seien für die Schätzung von Gefährdungspotenzialen ungeeignet, da man Schäden aus der Vergangenheit nicht in die Zukunft projizieren könne und dürfe.^{73,74} Diese Kritik ist sicher berechtigt, wenn auch vielleicht nicht in dieser Schärfe. Gerade das aktuelle Beispiel zeigt doch, dass aktuarielle „Standardtechniken“ bei richtiger Modellwahl durchaus konkurrenzfähig sind: orientiert man sich an den in der Rückversicherungsbranche geltenden Richtwerten für Wiederkehrperioden zwischen 100 und 200 Jahren, so hätte selbst die recht einfache obige statistische Analyse immer noch Gefährdungspotenziale zwischen 12,5 Mrd. und 20 Mrd. US \$ ergeben, also Größenordnungen, die durchaus in die Nähe des von Hurricane Andrew verursachten versicherten Schadens kommen.

Im übrigen trifft die Kritik in gewissem Sinn auch auf die geophysikalischen Modelle selbst zu, denn sie orientieren sich ebenfalls in erster Linie an historisch beobachteten Ereignissen, die in dieser oder ähnlicher Form nicht unbedingt repräsentativ für zukünftige Entwicklungen (z.B. bedingt durch mögliche Klimaveränderungen) sein müssen. Man sieht dies z.B. auch im Vergleich an der von K. Clark veröffentlichten Tabelle *mit* Berücksichtigung von Hurricane Andrew,⁷⁵ die zu deutlich höheren Gefährdungspotenzialen kommt:

⁷³ Vgl. Clark, K.M.: a.a.O., S. 275.

⁷⁴ Vgl. Khater, M., Kuzak, D.E.: a.a.O., S. 272.

⁷⁵ Vgl. Clark, K.M.: a.a.O., S. 274.

Schäden in Mio US \$ (mit Andrew)	Geschätzte Überschreitungswahrscheinlichkeit	Geschätzte Wiederkehrperiode in Jahren
13200	0,05	20
13500	0,02	50
23600	0,01	100
30700	0,005	200
50900	0,002	500
51500	0,001	1000

Tabelle 5

2.2 Sturmschäden in Europa

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, die überaus erfolgreichen geophysikalischen Sturm-Modelle für den US-amerikanischen Markt auch nach Europa zu exportieren. Allerdings treten hier durch die topographischen Besonderheiten wie Gebirgsketten und die vergleichsweise eher kleinräumigen Strukturen Modellierungsprobleme auf, die nicht so leicht zu bewältigen sind. So ist es nach eigener Erfahrung schon vorgekommen, dass einige der auf einer solchen Basis erstellten Einschätzungen für Gefährdungspotenziale mit Wiederkehrperioden zwischen 100 und 200 Jahren für gewisse Portfolios deutlich schon unter den real beobachteten Schäden der letzten 10 Jahre blieben. Damit haben solche Analysen insbesondere für die Rückversicherungsbranche nur geringen Wert, und man kehrt zwangsläufig zu den „traditionellen“ Ansätzen zurück.⁷⁶ Das nachfolgende Beispiel zeigt den durchaus erfolgreichen Einsatz dieser Methodik im Jahr 1998, wodurch ein betroffener Versicherer die durch die Stürme Lothar und Martin im darauffolgenden Jahr verursachten Schäden zu einem wesentlichen Teil auf seinen Rückversicherer abwälzen konnte.

⁷⁶ In der Praxis werden dennoch immer beide Ansätze verfolgt, und häufig decken sich – wie im Beispiel mit den Hurricanes – auch die Ergebnisse zumindest größenordnungsmäßig.

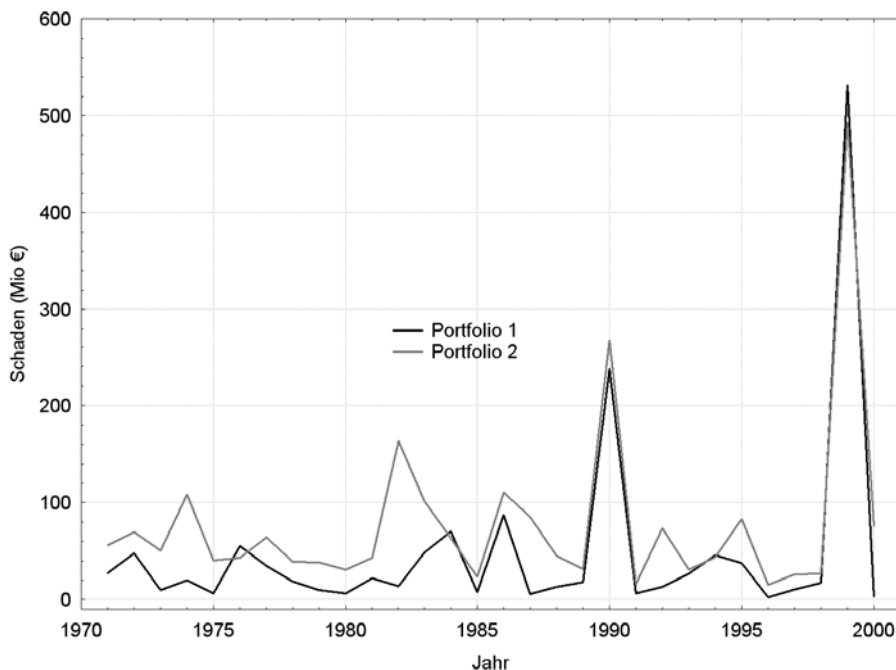


Abbildung 9: Schadenentwicklung in zwei Sturmportfolios

Die Graphik zeigt den Verlauf der Schadenentwicklung in zwei europäischen Sturmportfolios, wobei die Originaldaten zuvor geeignet trendbereinigt wurden. Auf der Basis der Daten bis 1998 ergibt sich nach statistischer Analyse folgendes Bild (Werte in Mio €):

Wiederkehrperiode in Jahren	Fréchet		Pearson Typ V		Loglogistisch		Lognormal	
	Pf. 1	Pf. 2	Pf. 1	Pf.2	Pf. 1	Pf. 2	Pf. 1	Pf. 2
10	89,930	138,270	77,843	121,964	64,851	111,723	68,213	117,260
20	170,049	210,395	136,690	167,869	98,324	147,215	97,059	148,520
40	317,648	317,580	235,885	226,527	146,760	191,981	131,791	182,309
100	719,530	544,309	478,582	330,350	246,571	270,786	188,084	231,374
200	1331,767	816,643	812,770	435,357	363,769	350,410	239,625	272,142

Tabelle 6

Der mit dem Fréchet-Modell geschätzte Jahrhundert-Schaden liegt hier knapp über dem in 1999 beobachteten Schaden von ca. 500 Mio € in beiden Portfolios. Eine Rückversicherungsdeckung bis zu diesem Limit hätte also in beiden Fällen ausgereicht, um die von Lothar und Martin verursachten Sturmschäden ohne eigene Verluste zu tragen.

2.3 Abhängige Gefahren

Dem hier zunächst betrachteten Beispiel unterliegt ein kombiniertes Portfolio aus Sturm- und Hochwasserschäden, dessen trendbereinigte zeitliche Schadenentwicklung in der nachfolgenden Graphik in logarithmischer Skalierung wiedergegeben ist.

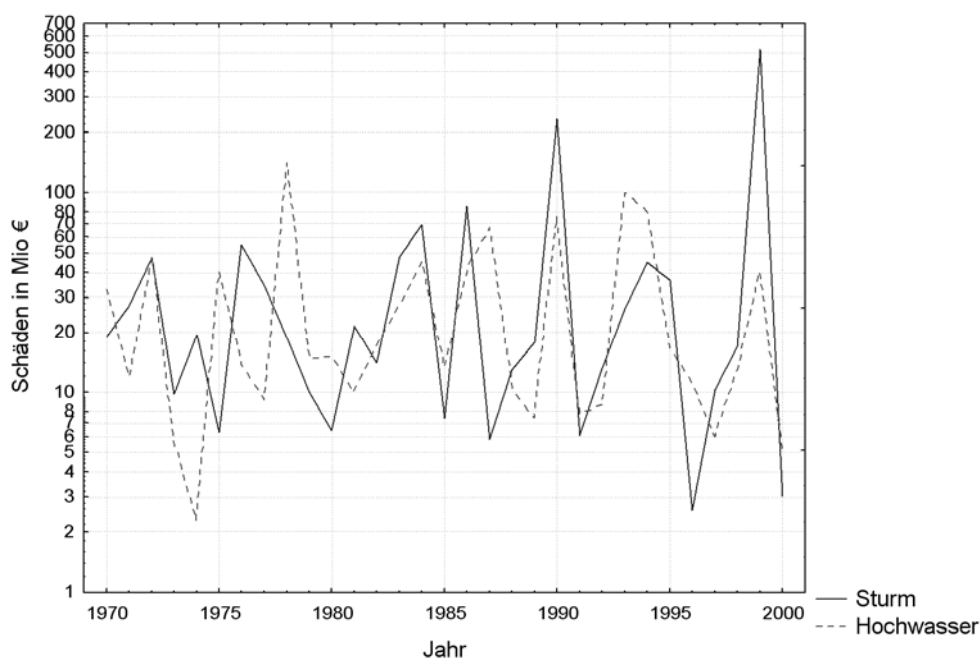


Abbildung 10: kombiniertes Elementargefahren-Portfolio

Man erkennt, dass in den Jahren 1984, 1990 und 1999 gleichzeitig hohe Schäden in beiden Gefahren eingetreten sind. Dies lässt die Vermutung zu, dass zwischen beiden Gefahren Triggerbedingt eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit bestehen könnte. Eine univariate Verteilungsanalyse zeigt, dass jeweils ein Fréchet-Modell für die Sturm- und Hochwasserschäden akzeptabel ist. Mit Hilfe des Programms XTREMES,⁷⁷ das von einer Siegener Arbeitsgruppe für den akademischen Bereich kostenfrei zur Verfügung gestellt wird, lässt sich zumindest für zwei Dimensionen eine Parameterschätzung für eine Gumbel-Copula durchführen. Die nachfolgende Graphik, in der die Werte in jeweils logarithmischer Skala eingetragen sind, zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen den Daten und den Höhenlinien des darauf beruhenden Kern-Dichteschätzers sowie den Höhenlinien für die geschätzte Dichte nach der

⁷⁷ Das Programm ist auf einer CD dem Buch von Reiss, R.D., Thomas, M.: a.a.O. beigelegt.

Gumbel-Copula. Für den Strukturparameter ergibt sich der Schätzwert $\lambda = 1,257$, was einer (schwachen) Korrelation von 0,218 entspricht.⁷⁸

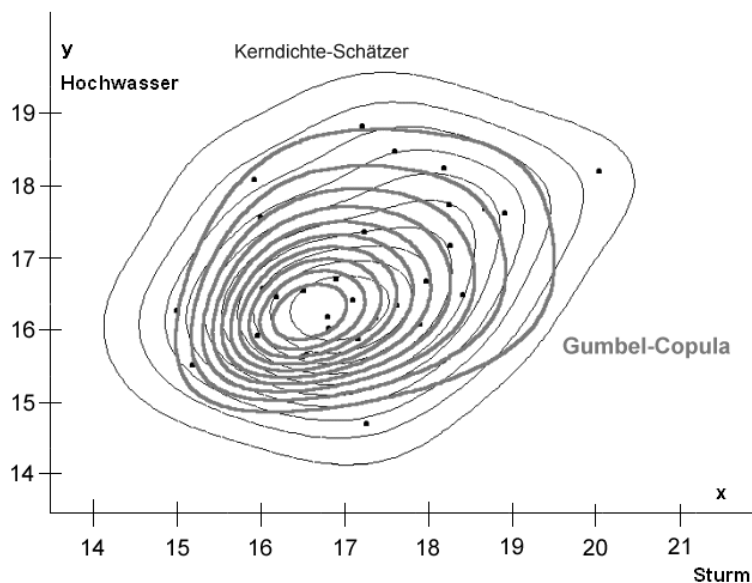


Abbildung 11: Datenpaare und Schätzfunktionen

Selbst diese geringfügige Abhängigkeit zwischen beiden Gefahren hat doch deutliche Auswirkungen im Großschadenbereich, etwa wenn man die simultanen Überschreitungswahrscheinlichkeiten $P(X > x, Y > x)$ dafür betrachtet, dass gleichzeitig ein Sturm- und ein Hochwasserschaden den Wert x übertreffen. Die nachfolgende Graphik zeigt dies:

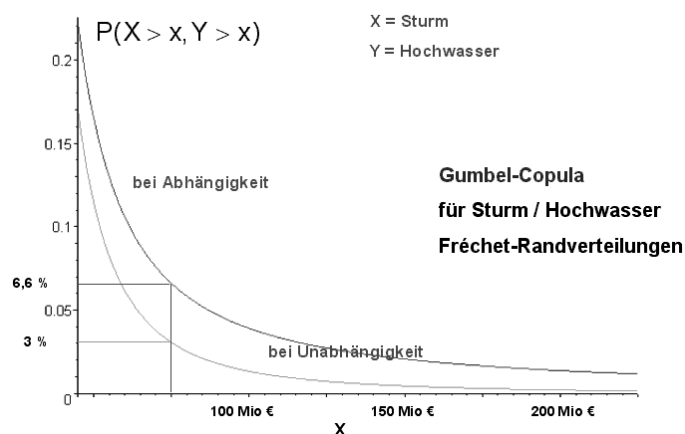


Abbildung 12: Vergleich von Überschreitungswahrscheinlichkeiten

⁷⁸ Für die Gumbel-Copula gibt es einen funktionalen Zusammenhang zwischen λ und der Korrelation, vgl. Reiss, R.D., Thomas, M.: a.a.O., S. 241.

So ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in beiden Gefahren der Wert 50 Mio € gleichzeitig überschritten wird, mit 6,6% mehr als doppelt so hoch wie im Unabhängigkeitsfall mit lediglich 3%.

Das letzte Beispiel soll noch eine Anwendungsmöglichkeit für eine Gauß-Copula aufzeigen. Dazu betrachten wir ein acht-dimensionales Portfolio aus den Gefahren Sturm, Hagel, Hochwasser und andere Gefahren für die Bereiche Gebäude und Hausrat. In der folgenden Graphik ist die zeitliche Entwicklung nach Trendbereinigung exemplarisch für die Gefahren Sturm und Hochwasser in logarithmischer Skalierung wiedergegeben.

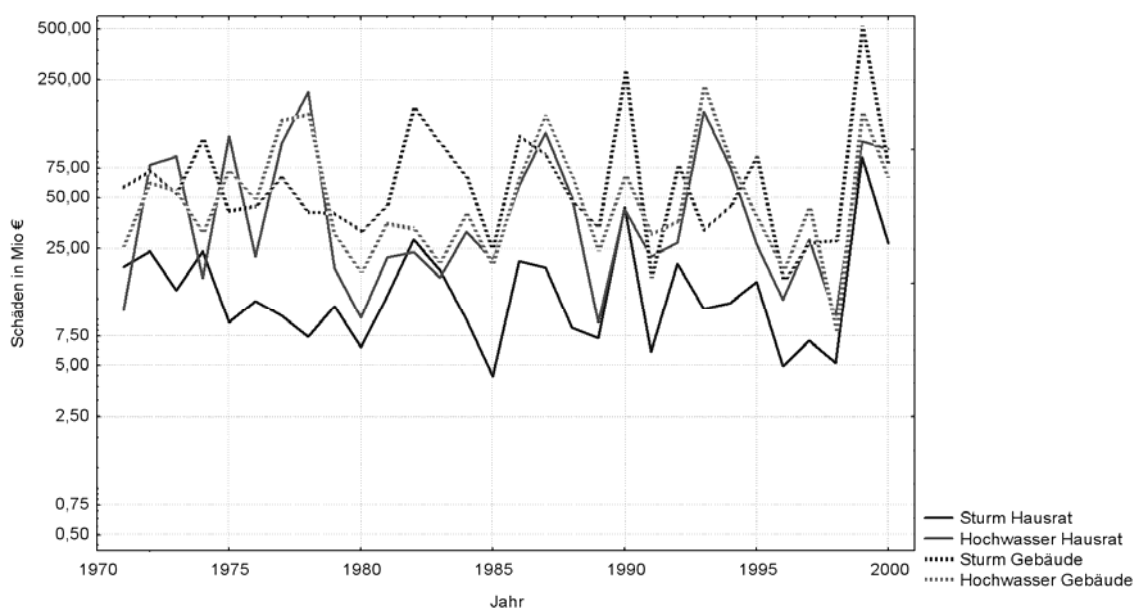


Abbildung 13: ein multivariates Portfolio

Auch hier lassen sich die Jahre 1987, 1990 und 1999 als besonders exponiert in Bezug auf simultane Großschäden erkennen. Eine univariate Verteilungsanalyse zeigt, dass sich die Gefahren „Sturm“ und „übrige Gefahren“ gut durch eine Fréchet-Verteilung, die Gefahren „Hagel“ und „Hochwasser“ gut durch eine Lognormalverteilung beschreiben lassen. Nach den notwendigen Transformationen der Daten mit den acht Funktionen $\Phi^{-1} \circ F_i$ wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, gelangt man über die daraus resultierenden normalverteilten Zufallsgrößen, die hier mit X_1, \dots, X_4 (für Hausrat) und Y_1, \dots, Y_4 (für Gebäude) bezeichnet sind, zu der folgenden empirischen Korrelationsmatrix $\hat{\Sigma}$:

$\hat{\Sigma}$	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1,000000	0,201843	0,372203	0,227020	0,905640	-0,016407	0,428273	0,228227
X_2	0,201843	1,000000	0,173831	0,222469	0,151245	0,806685	0,051707	0,249000
X_3	0,372203	0,173831	1,000000	0,477549	0,356425	0,041511	0,904674	0,472447
X_4	0,227020	0,222469	0,477549	1,000000	0,285696	0,114235	0,450969	0,938556
Y_1	0,905640	0,151245	0,356425	0,285696	1,000000	-0,000768	0,386757	0,321223
Y_2	-0,016407	0,806685	0,041511	0,114235	-0,000768	1,000000	-0,105053	0,155537
Y_3	0,428273	0,051707	0,904674	0,450969	0,386757	-0,105053	1,000000	0,424305
Y_4	0,228227	0,249000	0,472447	0,938556	0,321223	0,155537	0,424305	1,000000

Abbildung 14: empirische Korrelationen für die Gauß-Copula

Erwartungsgemäß sind hier die Risiken X_i und Y_i am höchsten miteinander korreliert (in Abbildung 14 durch Fettdruck markiert), da sie sich jeweils auf dieselbe Elementargefahr beziehen. Die nachfolgende Graphik zeigt die Auswertung einer auf dieser Analyse aufbauenden Simulationsstudie für den Jahres-Gesamtschaden, wobei die simulierten gegen die beobachteten Schäden in Form eines Quantil-Quantil-Plots aufgetragen wurden. Im Idealfall sollten die zugehörigen Punktepaare auf der Diagonalen liegen. Der Punkt oben rechts repräsentiert den größten Jahresgesamtschaden; die Graphik zeigt gerade hier eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Daten.

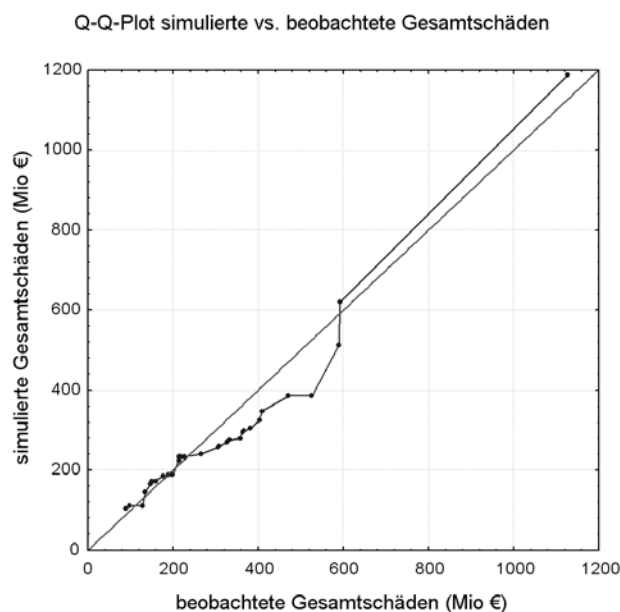


Abbildung 15: Simulationsstudie zum Jahres-Gesamtschaden

3. Resumee und Ausblick

Mathematische Schadenmodellierung ist im aktuariellen Bereich eine notwendige und herausfordernde Aufgabe, deren Bedeutung aufgrund wachsender Ansprüche an die Komplexität der abzubildenden Strukturen und an die Aussagefähigkeit der Ergebnisse für unternehmerische Entscheidungsprozesse auch künftig weiter zunehmen wird. Neben den traditionellen Verfahren, welche im wesentlichen univariate Methoden betreffen, die sich inzwischen auf eine ausreichend entwickelte theoretische Grundlage stützen können, stehen heute vermehrt auch multivariate Verfahren im Vordergrund, für deren Anwendbarkeit und Weiterentwicklung noch aktueller Forschungsbedarf besteht.

Im univariaten Fall gibt es mittlerweile zahlreiche Möglichkeiten, Modelle den Anforderungen entsprechend so zu verfeinern, dass aussagekräftige Ergebnisse möglich werden. Dies betrifft z.B. die Einbeziehung von zeitlichen oder ökonomischen Trends, die Mischmodellierung zur gleichmäßig guten Abbildung von Groß- und Kleinschäden oder die Rechtfertigung für bestimmte Modellklassen aufgrund allgemeingültiger theoretischer Lehrsätze, z.B. im Bereich der Extremwertstatistik. Im beobachteten Datenbereich lassen sich praktisch immer gut passende Modelle finden, und die moderne EDV-Technik ist so weit fortgeschritten, dass auch umfangreiche Simulationen in kurzer Zeit durchgeführt werden können. Sogar Szenarien, für die (noch) gar keine Schadenerfahrung vorliegt, lassen sich mit Hilfe von Computern unter Variierung von Modellparametern durchspielen, so dass zumindest qualitative Abschätzungen möglich werden. Auch als Ergänzung zu Studien, die auf geophysikalischen Modellen beruhen, sind mathematisch-statistische Methoden sinnvoll und geeignet, insbesondere dann, wenn mit unterschiedlichen Ansätzen ähnliche Resultate erzielt werden.

An die Grenzen der Modellierung stößt man hingegen sehr leicht, wenn etwa aus Sicht der Rückversicherung Extrapolationen über den beobachtbaren Datenraum notwendig werden, oder wenn komplexe Strukturen bei vergleichsweise wenigen Beobachtungen abzubilden sind. Insbesondere für Versicherungsanwendungen fehlen noch Erfahrungen im Umgang mit Copula-Modellen, sowie geeignete Theorien, die eine Auswahl bestimmter Copula-Klassen für bestimmte Fragestellungen vorgeben oder erleichtern können. Hier ist seitens der Mathematiker nach wie vor ein gutes „Fingerspitzengefühl“ und eine gewisse Offenheit für neue, manchmal vielleicht sogar „experimentelle“ Ansätze gefragt.

Literaturverzeichnis

- Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W., Weiber, R.:* Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung. 9. Aufl., Springer, Berlin 2000.
- Beirlant, J., Teugels, J.L., Vynckier, P.:* Practical Analysis of Extreme Values. Leuven University Press 1996.
- Berz, G.:* Naturkatastrophen an der Wende zum nächsten Jahrhundert – Trends, Schadenpotentiale und Handlungsoptionen der Versicherungswirtschaft. *ZversWiss* (1999), 427 – 442.
- Diaz, H.F., Pulwarty, R.S. (Eds.):* Hurricanes. Climate and Socioeconomic Impacts. Springer, N.Y. 1997.
- Disch, B.:* Über Wahrheit und Richtigkeit aktuarieller Modelle. *Der Aktuar* 9 (2003), Heft 1, 26 – 30.
- Blum, P., Dias, A., Embrechts, P.:* The ART of Dependence Modelling: The Latest Advances in Correlation Analysis. In: *Alternative Risk Strategies*, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 339 – 356.
- Broggi, M.F., Roch, P.:* Lothar. Der Orkan 1999. Ereignisanalyse. Eidgenössische Forschungsanstalt WSL, Birmensdorf, und Bundesamt für Umwelt, Wald und Landschaft BUWAL, Bern, Schweiz 2001.
- Clark, K.M.:* Current and Potential Impact of Hurricane Variability on the Insurance Industry. In: *Diaz, H.F., Pulwarty, R.S. (Eds.): Hurricanes. Climate and Socioeconomic Impacts.* Springer, N.Y. 1997, 273 – 283.
- Embrechts, P., de Haan, L., Huang, X.:* Modelling Multivariate Extremes. In: *Embrechts, P. (Ed.): Extremes and Integrated Risk Management.* Risk Books, London 2000, 59 – 67.
- Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D.:* Correlation: Pitfalls and Alternatives. In: *Embrechts, P. (Ed.): Extremes and Integrated Risk Management.* Risk Books, London 2000, 71 – 76.
- Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D.:* Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: *Dempster, M.A.H. (Ed.): Risk Management: Value at Risk and beyond.* Cambridge University Press, Cambridge 2002, 176 – 223.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, Th.:* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin 1997.
- Fahrmeir, L., Hamerle, A.:* Multivariate Statistische Verfahren. De Gruyter, Berlin 1984.
- Führer, A.:* Entwicklung eines Prämienmodells für die Warenkreditversicherung. VVW Karlsruhe 2001.

- Frey, H.C.:* Monte Carlo Simulation. Quantitative Risikoanalyse für die Versicherungsindustrie. Gerling Akademie Verlag, München 2001.
- Haindl, A.:* Risk Management von Lieferrisiken. VVW Karlsruhe 1996.
- Hart, D.G., Buchannan, R.A., Howe, B.A.:* Actuarial Practice of General Insurance, Institute of Actuaries of Australia, Sydney 1996.
- Hipp, Ch.:* Risikomanagement von Naturkatastrophen: helfen mathematische Methoden? ZVersWiss (1999), 443 – 456.
- Hofmann, G. (Hrsg.):* Auf dem Weg zu Basel II. Konzepte, Modelle, Meinungen. Bankakademie Verlag, Frankfurt/M. 2001.
- Jahn, A.:* Die Berücksichtigung klimatisch bedingter Veränderungen der Sturmaktivität in den Entscheidungsprozessen deutscher Erstversicherer. ZVersWiss (2001), 389 – 444.
- Junker, M., May, A.:* Measurement of aggregate risk with copulas. Caesar preprint 021, Center of Advanced European Studies and Research, Bonn, Germany 2002.
- Khater, M., Kuzak, D.E.:* Natural Catastrophe Loss Modelling. In: Alternative Risk Strategies, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 271 – 299.
- Klugman, A., Panjer, H.H., Willmot, G.E.:* Loss Models. Wiley, N.Y. 1998.
- Koller, G.:* Risk Modeling for Determining Value and Decision Making. Chapman & Hall, London 2000.
- Kotz, S., Nadarajah, S.:* Extreme Value Distributions. Theory and Applications. Imperial College Press, London 2000.
- Law, A.M., Kelton, W.D.:* Simulation Modeling & Analysis. McGraw-Hill, N.Y. 1991.
- Lohse, B.:* Risikomanagement in Dienstleistungsunternehmen – ein integratives Modell unter Berücksichtigung des KonTraG. VVW Karlsruhe 2002.
- Mack, Th.:* Schadenversicherungsmathematik. Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, 2. Aufl., VVW Karlsruhe 2002.
- Mari, D.D., Kotz, S.:* Correlation and Dependence. Imperial College Press, London 2001.
- Milbrodt, H., Helbig, M.:* Mathematische Methoden der Personenversicherung. De Gruyter, Berlin 1999.
- Müller, E.:* Naturkatastrophen und Aggregatkontrolle: Nutzen und Grenzen computergestützter Simulationsmodelle. VVW Karlsruhe 1995.
- Nelsen, R.B.:* An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics 139, Springer, N.Y. 1999.
- Pfeifer, D.:* Wissenschaftliches Consulting im Rückversicherungsgeschäft: Modelle, Erfahrungen, Entwicklungen. Zeitschrift für Versicherungswesen 21 (2000), 771 – 777.

- Pfeifer, D.*: Study 4: Extreme Value Theory in Actuarial Consulting: Windstorm Losses in Central Europe. In: *Reiss, R.D., Thomas, M.*: Statistical Analysis of Extreme Values. With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. 2nd ed., Birkhäuser, Basel 2001, 373 – 378.
- Plate, E.J., Merz, B.* (Hrsg.): Naturkatastrophen. Ursachen, Auswirkungen, Vorsorge. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 2001.
- Pohlhausen, R.*: Gedanken zur Überschwemmungsversicherung in Deutschland. *ZVersWiss* (1999), 457 – 467.
- Rasmussen, N.*: Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management. Palgrave MacMillan, N.Y. 2003.
- Reiss, R.D., Thomas, M.*: Statistical Analysis of Extreme Values. With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. 2nd ed., Birkhäuser, Basel 2001.
- Rootzén, H., Tajvidi, N.*: Extreme value statistics and windstorm losses: a case study. *Scand. Act. Journal* (1997), 70 – 94.
- Schäfer, F.*: Die Zunahme von Naturkatastrophen. Herausforderung für Gesellschaft und Versicherungswirtschaft. VVW Karlsruhe 1998.
- Steel, M.*: Integrated Simulation Techniques. In: *Alternative Risk Strategies*, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002, 533 – 543.
- v. Winter, R.*: Risikomanagement und Interne Kontrollen beim Sachversicherer im Sinne des KonTraG. VVW Karlsruhe 2001.
- Wagner, F.*: Risk Management im Erstversicherungsunternehmen. Modelle, Strategien, Ziele, Mittel. VVW Karlsruhe 2000.
- Woo, G.*: The Mathematics of Natural Catastrophes. Imperial College Press, London 1999.
- Woo, G.*: Quantifying Insurance Terrorism Risk. In: *Alternative Risk Strategies*, M. Lane (Ed.), Risk Books, London 2002.

Zusammenfassung

Mathematische Schadenmodellierung ist ein traditioneller Bereich aktuariellen Handelns. Veränderte Ansprüche an die Komplexität der Modelle und die Aussagekraft der daraus gewonnenen Erkenntnisse haben aber im Lauf der Zeit zu zahlreichen Weiterentwicklungen – vor allem im multivariaten Bereich – geführt, womit sich zugleich zunehmend auch die Frage nach dem „Machbaren“ und dem „Sinnvollen“ stellt. Eindimensionale Strukturen, für die ausreichend Daten zur Verfügung stehen, lassen sich heute durch verfeinerte Modelle weitestgehend exakt in dem beobachteten Bereich abbilden. Schwierig wird Modellierung dort, wo keine oder nur wenige oder sehr komplexe (hochdimensionale) Beobachtungen vorliegen und ersatzweise mit theoretischen Begründungen, z.B. bei der Analyse von Großschaden bzw. Extremwerten, gearbeitet werden muss. Vielversprechende Ansätze im multivariaten Bereich sind die sog. Copulas, durch die eine Trennung der univariaten Randverteilungsproblematik und der gemeinsamen Abhängigkeitsstruktur möglich wird. Hier liegen bisher im Versicherungssektor nur wenige Erfahrungen vor; es besteht daher nach wie vor ein erhöhter Forschungsbedarf in dieser Richtung.

Abstract

Mathematical claims modelling is a traditional art of actuarial practice. However, changing expectations concerning the complexity and efficiency of mathematical models have led to numerous developments in the recent years, particularly in the area of multivariate models. This goes hand in hand with questions about what is “possible” and what is “meaningful”. Due to sophisticated improvements of the classical models, the one-dimensional situation is well-tractable today whenever sufficient data material is available. A more difficult task is the modelling of situations where data are sparse or, alternatively, highly complex. Here sometimes theoretical arguments have to be used for justification, as in the area of large claims or extreme values. A more modern approach to multivariate situations is via copulas which allow for a separation of the problem of marginal distributions and the joint dependence structure. However, so far there is little experience with such tools in the insurance world, which makes further scientific research necessary.