1 Das Varianz-Kovarianz-Modell

a) Der Delta-Normal-Ansatz

Die Messung finanzieller Risiken kann grundsätzlich auf zwei Wegen erfolgen, analytisch oder durch Simulation. Für den analytischen Weg bedarf es einer Verteilungsannahme. Dem **Varianz-Kovarianz-Modell** liegt eine Normalverteilung zu Grunde. Das Modell dient zur Messung des Value at Risk einer Bestands-Exposure. Der Value at Risk ist der maximale Verlust, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb einer festgelegten Periode nicht überschritten wird.

Der Value at Risk einer einzelnen Vermögensposition ergibt sich aus der Multiplikation von einem Marktwert mit der auf die gewünschte Wahrscheinlichkeit skalierten Volatilität. Setzt sich ein Portfolio aus mehreren unterschiedlichen Vermögenspositionen zusammen, bedarf es einer Aggregation der einzelnen Value at Risk-Beträge zu einem Portfolio-Value at Risk. Bei einer einfachen Addition der Risikobeträge bleiben die häufig vorhandenen Diversifikationseffekte unbeachtet. Eine Aussage über die mögliche Diversifikationswirkung zwischen zwei Vermögenspositionen liefert deren Korrelationskoeffizient.

Die risikodiversifizierende Wirkung des Korrelationskoeffizienten wird für ein Beispiel-Portfolio berechnet. Ein deutscher Konzern möge Kupfer-Vorräte mit einem Marktwert von 100 Mio. USD halten. Der Rohstoffpreis für Kupfer in USD/Tonne hat auf Basis von historischen Beobachtungen eine tägliche Volatilität von 0,0116037 % (Die Messung erfolgte auf Basis der logarithmierten täglichen Kupferpreisänderungen im Zeitraum vom 31.12.1998 bis 28.11.2000). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % wird der Verlust aus einer Kupferpreisänderung binnen eines Tages nicht größer als 1,91 Mio. USD ausfallen. Bei einem Wechselkurs von 0,857 EUR/USD am 28.11.2000 würde sich daraus ein VaR_{Kupfer} in EUR von - 2,23 Mio. EUR ergeben. Diese Betrachtung ist jedoch unvollständig, da der Wechselkurs EUR/USD einen zweiten Risikofaktor darstellt und berücksichtigt werden muss. In einem ersten Schritt könnte der Value at Risk isoliert für das Risiko aus den Änderungen des Wechselkurses berechnet werden. Die Tages-Volatilität für den Wechselkurs EUR/USD beträgt 0,64336 %.[1] Daraus ergibt sich mit 95 % Wahrscheinlichkeit ein $VaR_{EUR/USD}$ von - 1,06 Mio. USD. Der $VaR_{EUR/USD}$ kann mit dem Wechselkurs von 0,857 EUR/USD in EUR umgerechnet werden und beträgt - 1,23 Mio. EUR.

In einem zweiten Schritt stellt sich die Frage nach der korrekten Aggregation beider VaR-Kennzahlen. Die einfache Addition von Rohstoffpreis-VaR und Wechselkurs-VaR ergibt den Value at Risk von - 2,97 Mio. USD respektive - 3,46 Mio. EUR. Bei der Addition zwischen den beiden Risikofaktoren wird implizit eine Korrelation von 1 angenommen. Jedoch ist für die vergangenen 498 Handelstage zwischen den beiden Risikofaktoren eine Korrelation von 0,042152 messbar.[2] Mit einer Korrelation unter 1 können **Risikodiversifikationseffekte** realisiert werden, die in der bisherigen Berechnung noch nicht betrachtet wurden. Die Korrelation zwischen den beiden Risikofaktoren kann mit Hilfe von Gleichung 1 berücksichtigt werden, welche an eine Formel aus dem **Portfolio-Selection-Modell** von **Markowitz** zur Berechnung des Portfoliorisikos im Zwei-Anlagen-Fall angelehnt ist.[3]

Gleichung 1: $\mathrm{VaR}_{PO} = \sqrt{\mathrm{VaR}_1^2 + \mathrm{VaR}_2^2 + 2 \cdot \mathrm{VaR}_1 \cdot \mathrm{VaR}_2 \cdot k_{1,2}}$

Bei Anwendung der Gleichung 1 wird für den VaR_1 der VaR_{Kupfer}, für den VaR_2 der $VaR_{EUR/USD}$ und für die Korrelation zwischen beiden $k_{1,2} = 0{,}042152$ eingesetzt. Für das Ergebnis ist es unerheblich, ob die beiden Value at Risk-Kennzahlen erst von USD in EUR umgerechnet und dann eingesetzt werden, oder ob der re-

1 Die Messung erfolgte auf Basis der logarithmierten täglichen Wechselkursänderungen im Zeitraum vom 31.12.1998 bis 28.11.2000.

2 Gemessen wurde die Korrelation zwischen den logarithmierten Veränderungen beider Risikofaktoren.

3 MARKOWITZ, H. (1952), S. 77 ff.; SCHULTER-MATTLER, H./ TYSIAK, W. (1999), S. 84-88.

sultierende Value at Risk beider Risikofaktoren von USD in EUR umgerechnet wird. In beiden Fällen ergibt sich ein Value at Risk Betrag in EUR von - 2,59 Mio. EUR. Gegenüber dem Portfolio-VaR_{EUR} mit einer Korrelation von 1 verringert sich das Risiko in Folge des nun berücksichtigten Diversifikationseffekts um den Betrag von 870.000 EUR bzw. 25 %.

Gleichung 2:

$$\mathbf{VaR_{PO}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j}} \cdot z$$

Gleichung 3:

$$\mathbf{VaR_{PO}} = \sqrt{\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov_{1,2} & \cdots & cov_{1,n} \\ \vdots & & & \\ cov_{1,2} & cov_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} \cdot z$$

Gleichung 4:

$$\mathbf{VaR_{PO}} = \sqrt{X^T \cdot cov \cdot X} \cdot z$$

Abb. 1: Berechnung des VaR für mehr als zwei Risikofaktoren

Für die Berechnung eines Value at Risk mit mehr als zwei Risikofaktoren lässt sich Gleichung 1 in eine allgemeine Form bringen (vgl. Gleichung 2 in Abb. 1). Mit x_i werden die Volatilitäten σ_i der einzelnen Risikofaktoren i = 1,...,n entsprechend ihrem Anteil am Portfolio PO gewichtet. Die Varianzen der Risikofaktoren werden mit σ_i^2 bezeichnet. Mit dem Faktor z wird der Value at Risk auf die gewünschte Wahrscheinlichkeit skaliert. Allgemein ist $z(\alpha)$ der Wert einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z, bei dem die Verteilungsfunktion den Wert α annimmt. Bei einer Vielzahl von Risikofaktoren würde ein unübersichtlicher Ausdruck unter der Wurzel entstehen, so dass die Überführung in eine **Matrixschreibweise** mehr Übersichtlichkeit verschafft. Die ausführliche Matrizenschreibweise ist in Gleichung 3 (vgl. Abb. 1) dargestellt. Darunter steht Gleichung 4 als Kurzform.

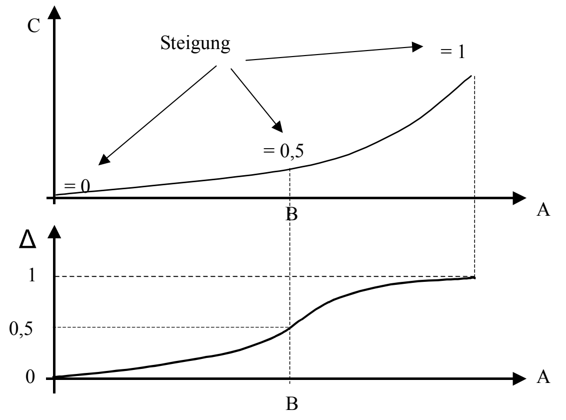
Das Varianz-Kovarianz-Modell existiert in zwei Varianten, dem Delta-Normal-Ansatz und dem Delta-Gamma-Ansatz.[4] Der **Delta-Normal-Ansatz** unterstellt, dass die Marktwerte der Positionen im Portfolio linear auf Veränderungen der Risikofaktoren reagieren und ist daher für die Risikoberechnung von Portfolios mit symmetrischen Finanzinstrumenten geeignet. Ein Beispiel für **symmetrische Finanzinstrumente** sind Aktien.[5] Kauft ein Unternehmen eine Aktie zum Kurs von 100 EUR, so bedeutet jeder Euro Kursverlust einen gleich großen Verlust für das Unternehmen und umgekehrt erhöht jeder Kursgewinn den Gewinn des Unternehmens um den gleichen Betrag. Das Unternehmen könnte alternativ eine Kaufoption auf eine Aktie beziehen (**engl. Call**). Durch den Kauf eines Calls ist das Unternehmen berechtigt, aber nicht verpflichtet, eine bestimmte Anzahl von Aktien zu einem vorher vertraglich fixierten Basispreis vom Stillhalter der Option zu beziehen. Produkte mit Ausübungswahlrechten und ungleichen Gewinn-/Verlustmöglichkeiten für Käufer und Verkäufer werden **als asymmetrische Finanzinstrumente** bezeichnet.[6]

Wie symmetrische und asymmetrische Finanzinstrumente im Delta-Normal-Ansatz berücksichtigt werden, wird an einem **Beispiel** gezeigt. Das Unternehmen möge ein Portfolio halten, welches aus einer Aktie und einer Option (Call) auf eine weitere Aktie des gleichen Emittenten besteht. Mit der Option hat sich das Unternehmen bei Vertragsabschluss einen Bezugspreis von 95 EUR gesichert.

4 Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 489; JORION, P. (1997), S. 186 ff.; RAU-BREDOW, H. (2001), S. 317.

5 Für eine ausführliche Beschreibung von Chancen und Risiken bei Swaps und Zins-Optionen vgl. SCHIERENBECK, H./ WIEDEMANN, A. (1996), S. 317-326 und S. 370-384. Ebenso: WIEDEMANN, A. (2003), S. 41 ff.

6 Vgl. STEINER, M./ BRUNS, C. (1996), S.326 ff.; WIEDEMANN, A. (2003), S. 140 ff.



$$\Delta = \frac{dC}{dA}$$

Das Optionsdelta eines Calls ist immer positiv und liegt im Wertebereich zwischen 0 und 1.

Abb. 2: Veränderung des Deltas bei einer Call Option in Abhängigkeit des Kassakurses

Im Zeitablauf möge der Kurs der Aktie (engl. Underlying der Option) auf 100 EUR steigen. Die Option ist dann im Geld, denn bei Ausübung könnte das Unternehmen eine Aktie zum Preis von 95 EUR beziehen, obwohl der aktuelle Marktwert bei 100 EUR liegt. Der Marktwert der Option ist daher höher als bei Vertragsabschluss, jedoch steigt der Optionspreis im Gegensatz zur Aktie nicht linear. Im oberen Teil von Abb. 2 ist der Verlauf des Optionspreises für alternative Aktienkurse skizziert.[7] An der Ordinate ist der Preis C der Call Option abgetragen, an der Abszisse der Kurs A der Aktie.

Die Abhängigkeit des Marktwerts der Option gegenüber dem Aktienkurs wird durch das Δ (**Optionsdelta**) beschrieben.[8] Es bezeichnet allgemein die Preissensitivität einer Option gegenüber Veränderungen des Basisobjektpreises. Das Δ berechnet sich aus der Relation der Optionspreisänderung dC für den Call zur Änderung des Kassakurses dA (vgl. Gleichung 5).

---

7 Die Berechnung der Optionspreise erfolgt für Aktien mit dem Black/Scholes Modell und für Zinsoptionen mit dem Black76-Modell. Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 356 ff., 748 ff.

8 Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 93; HULL, J. C. (2001), S. 443

Gleichung 5: $\Delta = \frac{dC}{dA}$

Für das Beispiel-Portfolio soll zum Vergleich sowohl der Value at Risk für die Aktie als auch für die Option berechnet werden. Als Tages-Volatilität der Aktie wird der Wert 1,2 % angenommen und die Option möge eine Tages-Volatilität von 1,075 % haben. Der Value at Risk der Aktie für eine Haltedauer von 1 Tag mit 95 % Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Produkt aus dem Aktienkurs und der mit z = - 1,6449 skalierten Volatilität.

$$
\begin{aligned}
VaR_{Aktie} &= \text{Kurs} \bullet \text{z-Wert} \bullet \text{Volatilität} \\
&= 100\ \text{EUR} \bullet (-1{,}6449) \bullet 0{,}012 = -\,1{,}974\ \text{EUR}
\end{aligned}
$$

Um den Value at Risk der Call-Option zu berechnen, muss das Δ berücksichtigt werden. Für das Beispiel möge Δ=0,8113 sein. Die Ergänzung der Value at Risk Berechnung um das Δ ist notwendig, da bei einem Kursverlust der Aktie von z.B. 10 EUR die Option nur einen Wertverlust von Δ • 10 EUR erleiden würde. Der Optionspreis beträgt 7,80 EUR.

$$
\begin{aligned}
VaR_{Call} &= \text{Optionspreis} \bullet \Delta \bullet \text{z-Wert} \bullet \text{Volatilität} \\
&= 7{,}80\ \text{EUR} \bullet 0{,}8113 \bullet (-1{,}6449) \bullet 0{,}01075 \\
&= -\,0{,}1119\ \text{EUR}
\end{aligned}
$$

Trotz der VaR-Adjustierung um das Δ der Option kommt es bei der Delta-Normal-Methode häufig zu einer **Fehleinschätzung des tatsächlichen Risikos**. In dem Beispiel befindet sich der aktuelle Aktienkurs bei 100 EUR und der Wert der Option beträgt 7,80 EUR. Bei einem Kursverlust von 2 EUR ändert sich der Wert der Option wegen des nichtlinearen Verlaufs der Preisfunktion nur um einen Bruchteil, der durch das Δ=0,8113 approximiert wird. Der Wert der Option fällt näherungsweise um 0,8113 • (-1 EUR) auf 6,17 EUR. Eine exakte Neubewertung der Option mit Hilfe der Black/Scholes Formel führt zu einem Optionspreis von

6,24 EUR. Der Optionspreis sinkt langsamer, als es von der Delta-Normal-Methode angenommen wird. Die Differenz zwischen dem exakten und dem approximierten Wert beträgt 0,07 EUR. Sie entsteht dadurch, dass sich das Δ stets verändert.

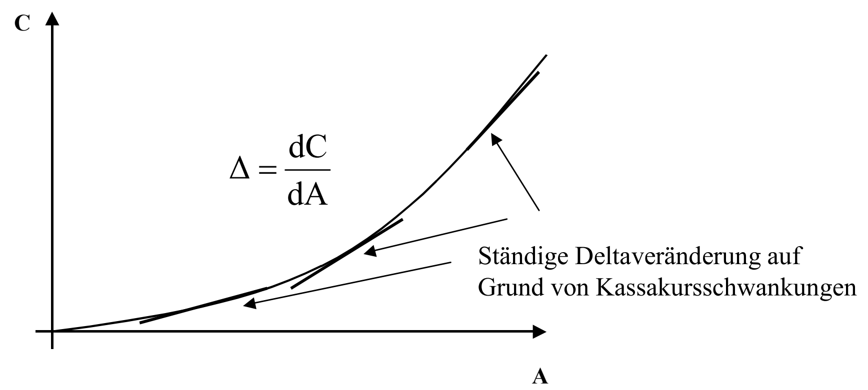


Abb. 3: Die ständige Veränderung des Δ

Die **ständige Veränderung des** Δ ist auf die permanent schwankenden Aktienkurse zurückzuführen. Für jeden Aktienkurs ergibt sich eine andere Steigung der Optionspreiskurve. Beispielsweise würde das Δ bei dem neuen Aktienkursniveau von 98 EUR den Wert 0,7404 statt zuvor 0,8113 haben. Aus der ständigen Veränderung des Δ entstehen Fehler bei der Value at Risk Berechnung mit der Delta-Normal-Variante des Varianz-Kovarianz-Modells (vgl. Abb. 3).

b) Der Delta-Gamma-Ansatz

Die zweite Methode des Varianz-Kovarianz-Modells bildet der **Delta-Gamma-Ansatz**.[9] Darin wird die Veränderung des Δ durch eine weitere Kennzahl berücksichtigt. Das Γ (Gamma) gibt die Veränderungsrate des Δ bezüglich der Veränderung des Kassakurses an (vgl. Gleichungen 6 und 7 in Abb. 4).[10]

---

9 Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 499; JORION, P. (1997), S. 191 ff.
10 Delta, Gamma: Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 443 ff. und S. 456 ff.

Gleichung 6:
Das Optionsgamma gibt die Veränderungsrate des Optionsdeltas bezüglich der Veränderung des Kassakurses an:

$$\Gamma(\text{Call}) = \frac{d^2C}{dA^2}$$

Gleichung 7:
Für eine Call-Option auf Aktien ohne Dividendenzahlung gilt gemäß dem Modell von Black/Scholes:

$$\Gamma(C) = \frac{N'(d_1)}{A * \sigma * \sqrt{T}}$$

Abb. 4: Das Gamma

Für das Beispiel ergibt sich bei einem Aktienkurs von 100 EUR und einer Restlaufzeit der Option von T = 1 Jahr ein Γ von - 0,0336.[11] Das Γ entspricht der zweiten Ableitung der Optionspreisformel von Black/Scholes und wird in Form einer Taylor-Approximation zu der ersten Ableitung addiert, dem Δ.[12]

Die allgemeine Darstellung der Delta-Gamma-Methode in Form einer Taylor-Approximation zeigt Gleichung 8. Für das Beispiel ergibt sich ein Value at Risk der Aktienoption von - 0,1116 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %. Die Differenz zum Value at Risk mit der Delta-Normal-Methode beträgt 0,00032 und ist identisch mit dem Wert aus der zweiten Ableitung, die das Γ enthält.

Gleichung 8:

$$VaR_{Cal} = \text{Optionspreis} \bullet |\Delta| \bullet \text{z-Wert} \bullet \text{Volatilität} - ½ \bullet \Gamma \bullet (\text{z-Wert} \bullet \text{Volatilität} \bullet \text{Optionspreis})^2$$

[11] Das Γ bezieht auf eine Kursänderung der Aktie von - 1 EUR, hier von 100 EUR auf 99 EUR.
[12] Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 112-114.

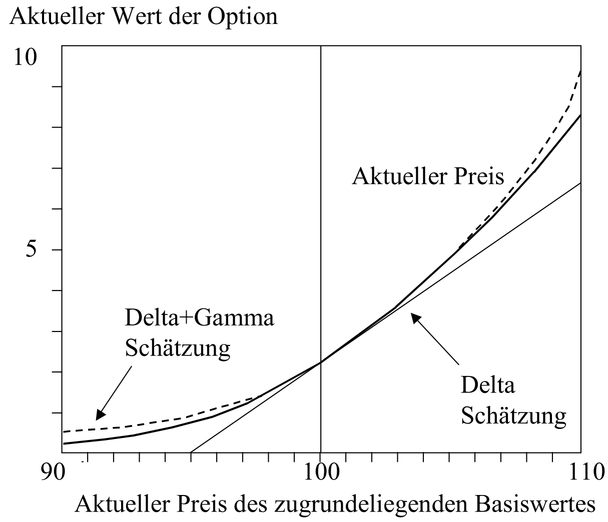


Abb. 5: Delta-Gamma Approximation für eine Kaufoption

Die allgemeine Darstellung der Delta-Gamma-Methode in Form einer Taylor-Approximation zeigt Gleichung 8. Für das Beispiel ergibt sich ein Value at Risk der Aktienoption von - 0,1116 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %. Die Differenz zum Value at Risk mit der Delta-Normal-Methode beträgt 0,00032 und ist identisch mit dem Wert aus der zweiten Ableitung, die das Γ enthält.

Der Value at Risk mit Hilfe der Delta-Gamma-Methode fällt geringer aus, da durch das Γ der konvexe Verlauf der Optionspreiskurve besser berücksichtigt wird. Wenn der Aktienkurs sinkt, fällt der Optionspreis langsamer als von der Delta-Normal-Methode angenommen wird (vgl. Abb. 5).[13] Der Käufer einer Kaufoption, im Englischen wird die Position kurz als long Call bezeichnet, profitiert von einem hohen Γ (long gamma). Je größer das Γ, desto höher ist die Konvexität und umso langsamer fällt der Optionswert bei sinkenden Aktienkursen. Ebenso positiv ist der Fall steigender Kurse, denn hier steigt der Optionswert schneller als dies bei einem linearen Verlauf angenommen wird.[14]

13 Vgl. JORION, P. (2001), S. 212.

14 Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 110 f. Der gleiche Effekt gilt bei long Put Positionen und Anleihen mit einer hohen Konvexität.

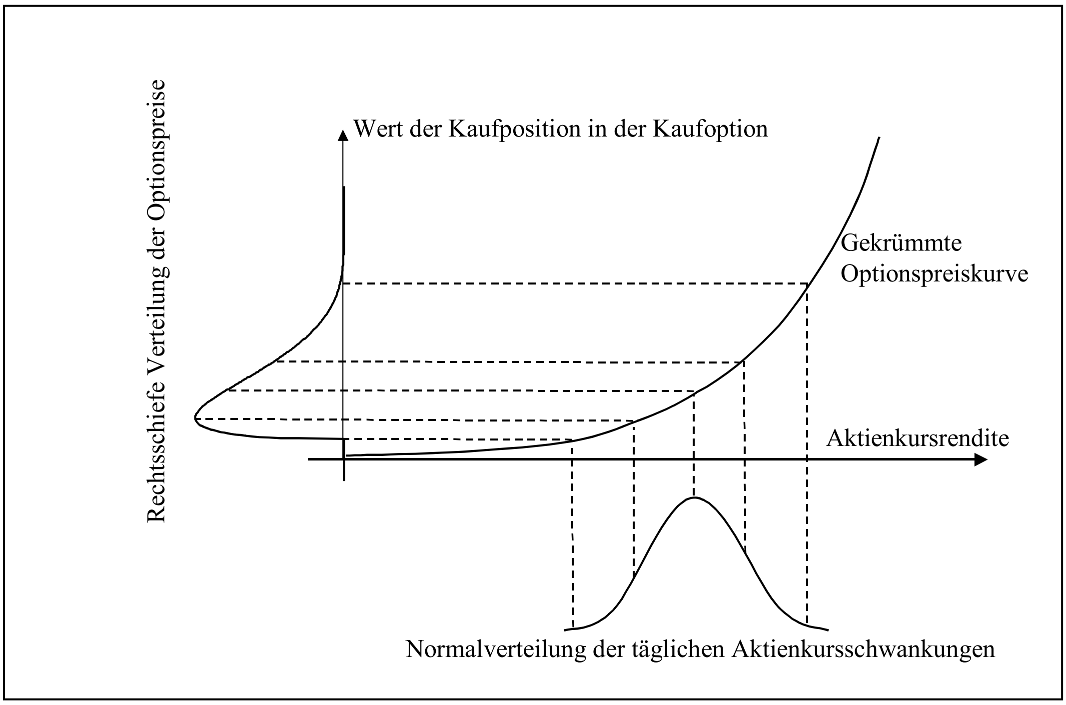


Abb. 6: Verteilung für den Optionspreis einer Kaufoption

Im Umkehrschluss bedeutet ein hohes Γ für den Stillhalter (Verkäufer, engl. short Call) der Option sowohl bei sinkenden als auch steigenden Aktienkursen ein höheres Risiko als von der Delta-Normal-Methode angenommen wird. Der Delta-Gamma-Methode hingegen gelingt es besser, den konvexen Verlauf der Optionspreiskurve nachzubilden. Jedoch entsteht durch die Konvexität ein neues Problem. Je größer das Γ ist, umso schiefer wird die Verteilung der Optionspreise. Für den Käufer einer Kaufoption ist das Γ positiv und es ergibt sicht eine rechtsschiefe Verteilung der Optionspreise (vgl. Abb. 6).[15]

Eine rechtsschiefe Verteilung ist gekennzeichnet durch eine schmale Flanke am äußerst linken Ende. Für die Value at Risk Berechnung ist das linke Ende entscheidend. Da auch von der Delta-Gamma-Methode eine Normalverteilung angenommen wird, kommt es ohne Berücksichtigung der Schiefe zu einer **Überschätzung des Risikos**. Eine Korrektur unter Einbezug der gemessenen Schiefe ist mit

---

15 Der Verkäufer einer Kaufoption hat die Gegenposition, folglich ein negatives Gamma und eine daraus resultierende linksschiefe Verteilung für den Optionswert. Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 500 f.

Hilfe der Cornish-Fisher Erweiterung möglich, die den z-Wert um die Schiefe der Verteilung bereinigt.[16]

c) Kritische Analyse des Varianz-Kovarianz-Modells

Die Delta-Normal-Methode hat gegenüber allen anderen Methoden zur Risikomessung einen Vorteil: Die besonders schnelle und einfache Risikoschätzung.[17] Davon abgesehen benötigt das Modell eine Reihe von Annahmen, die in der Realität nicht vollständig erfüllt sind.[18] Am häufigsten wird die Annahme normalverteilter Veränderungen der Risikofaktoren kritisiert.[19]

Die Delta-Normal-Methode führt zu falschen Risikoprognosen, wenn in dem betrachteten Portfolio Optionen enthalten sind.[20] Das Ausmaß des Fehlers wächst mit dem Portfolioanteil asymmetrischer Produkte. Daher wurde in dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels die Delta-Gamma-Methode zur Lösung des Problems vorgeschlagen. Die Anwendung der Delta-Gamma-Methode liefert für Portfolios mit optionalen Produkten exaktere Value at Risk Schätzungen als die Delta-Normal-Methode. Dennoch kommt es auch bei der Delta-Gamma-Methode zu fehlerhaften Risikoeinschätzungen, wenn die Restlaufzeit der Optionen gegen Null strebt und/oder die Optionen im Geld sind.

Die Autoren KNÖCHLEIN und LIERMANN haben die Prognosegüte der Delta-Normal-Methode und der Delta-Gamma-Approximation für Aktienoptionen mit einer Restlaufzeit von 91 Tagen und 3 Tagen untersucht.[21] Dabei wurden die Value at Risk Schätzungen aus den beiden Methoden mit Referenzwerten aus einer Monte Carlo Simulation verglichen. Während die Delta-Normal-Methode und die

16 Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 502 f.; RAU-BREDOW, H. (2001), S. 317.
17 Vgl. JORION, P. (2001), S. 214.
18 Vgl. FRÖMMEL, M./ MENKHOFF, L./ TOLKSDORF, N. (1999), S. 508 ff.
19 Vgl. WEGNER, O./ SIEVI, C./ SCHUMACHER, M. (2001), S. 140.
20 Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 108. JORION, P. (2001), S. 209.
21 Vgl. KNÖCHLEIN, G./ LIERMANN, V. (2000), S. 388 ff.

Delta-Gamma-Approximation mit Hilfe von Sensitivitätskennzahlen eine Näherungslösung für die Veränderung des Optionspreises bei Änderung von Preisparametern liefern, wird bei der Monte Carlo Simulation die Option mit jedem simulierten Satz von Preisparametern bewertet. Statt die Wertänderung der Option approximativ zu schätzen, wird für jedes Szenario der neue Optionspreis berechnet (Vollbewertung). Auf diese Weise werden bei nichtlinearen Produkten Approximationsfehler vermieden.

Bei Restlaufzeiten von 91 Tagen entstehen aus den Approximationen erkennbare Abweichungen zum Optionspreis aus der Neubewertung, die bei 3 Tagen Restlaufzeit deutlich zunehmen. Für Optionen die am Geld sind und/oder eine sehr kurze Restlaufzeit haben, wird eine Vollbewertung als ebenso notwendig angesehen, wie bei exotischen Optionen oder sehr großen Risikofaktoränderungen. Weder die Delta-Normal-Methode noch die Delta-Gamma-Approximation liefern in den genannten Fällen zuverlässige Value at Risk Schätzungen. Die alleinige Präsenz von Optionen im Portfolio muss allerdings nicht zu einem falschen Value at Risk führen. Der Fehler hängt vielmehr von der Restlaufzeit und der Volatilität der Optionen und von der betrachteten Haltedauer für den Value at Risk ab.[22] Von JORION wird explizit darauf hingewiesen, dass auch das Wurzelgesetz nicht anwendbar ist, wenn im Portfolio Optionen vorhanden sind.[23]

Für die Praxis kann das Varianz-Kovarianz-Modell als erste schnelle Lösung dienen, um z.B. einen ersten Eindruck von den aktuell bestehenden Risiken zu erhalten. So könnte die tägliche Risikoüberwachung mit einem Varianz-Kovarianz-Modell erfolgen und in gewissen Abständen wären die Risikoschätzungen mit Hilfe von exakteren, aber komplexen und rechenaufwendigen Modellen zu prüfen. Ein Backtesting zu diesem Simulationsverfahren ist im Anhang zu finden.

[22] Vgl. JORION, P. (2001), S. 208 – 218.
[23] Begriff „Wurzelgesetz“: Vgl. DEUTSCH, H.-P. (2001), S. 511, 532.

2 Die Historische Simulation

a) Quotientenansatz

Die Historische Simulation verzichtet auf eine analytische Untersuchung der Risikofaktoren und arbeitet stattdessen mit ausgewählten Datensätzen aus der Vergangenheit.[24] Die Herausforderung besteht in der Auswahl eines optimalen Zeitfensters. Wenn die betrachteten Werte weit in die Vergangenheit zurückgehen, stellt sich die Frage, inwiefern sehr alte Beobachtungen für die aktuelle Risikomessung noch relevant sind. Wird die Historie jedoch zu kurz gewählt, stellt sich die Frage, ob die Anzahl der betrachteten Werte repräsentativ ist. Gleichzeitig vergrößert sich der Schätzfehler mit abnehmendem Stichprobenumfang.

Im Folgenden wird die Historische Simulation an einem Beispiel erläutert. Für den Wechselkurs EUR/USD soll am 28.11.2000 auf Basis von zunächst 250 historischen Wechselkursänderungen der Value at Risk mit einer Haltedauer von 1 Tag und einer Wahrscheinlichkeit von 95 % berechnet werden. Die Historische Simulation lässt sich mit der **Differenzenmethode**[25] oder mit der **Quotientenmethode** durchführen. In dieser Arbeit wird die Quotientenmethode präferiert.

Die **Quotientenmethode** erfüllt sowohl das Kriterium der Unabhängigkeit von dem absoluten Niveau, als auch das Kriterium der Stationarität. Für das Standardbeispiel einer Fremdwährungsposition werden die **logarithmierten Wechselkursänderungen** der vergangenen 250 Tage berechnet (vgl. Tab. 1). Im zweiten Schritt werden die 249 beobachteten Veränderungen mit dem Wechselkurs vom 28.11.2000 multipliziert und ergeben 249 mögliche Wechselkursänderungen für den nächsten Tag.

[24] Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 50 f.; JORION, P. (1997), S. 193 ff.; OEHLER, A./ UNSER M. (2001), S. 161.

[25] Vgl. HUSCHENS, S. (2000), S. 6 f., 12 ff.

Historie	Datum	EUR/USD	$\ln(K_t/K_{t-1})$	$0{,}857 \cdot e^{\ln(K_t/K_{t-1})}$
250	15.12.1999	1,007		
249	16.12.1999	1,015	0,007913	0,864
248	17.12.1999	1,008	-0,006920	0,851
247	20.12.1999	1,008	0,000000	0,857
246	21.12.1999	1,010	0,001982	0,859
245	22.12.1999	1,008	-0,001982	0,855
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
5	22.11.2000	0,845	0,002370	0,859
4	23.11.2000	0,840	-0,005935	0,852
3	24.11.2000	0,840	0,000000	0,857
2	27.11.2000	0,852	0,014185	0,869
1	28.11.2000	0,857	0,005851	0,862

Tab. 1: Datenaufbereitung für die Quotientenmethode

Für ein Unternehmen mit der Heimatwährung EUR und einer Vermögensposition von 100 Mio. in der Fremdwährung USD besteht das Risiko in einem steigenden Wechselkurs EUR/USD. Im nächsten Schritt wird das Portfolio von 100 Mio. USD mit den 249 simulierten Wechselkursen bewertet. Der simulierte Portfoliowert berechnet sich aus dem Quotienten von dem Volumen in USD und dem jeweiligen Wechselkurs. Die Ergebnisse für den Portfoliowert in EUR sind abschließend der Größe nach aufsteigend zu ordnen. Von jedem für den nächsten Tag simulierten Portfoliowert wird der Portfoliowert vom 28.11.2000 abgezogen, woraus 249 mögliche Wertänderungen resultieren. In Abb. 7 sind einige der simulierten Portfoliowerte und die sich daraus ergebenden Gewinne und Verluste der Größe nach geordnet abgebildet.

Auf der rechten Seite von Abb. 7 ist die Verteilung der Gewinne und Verluste zu sehen und in der Vergrößerung wird die für den Value at Risk relevante linke Flanke gezeigt. Für die im Beispiel gewählte Wahrscheinlichkeit von 95 % beträgt der Verlust am nächsten Tag höchstens 1,309 Mio. EUR.

simulierter Portfoliowert in EUR	Rang	simulierter Verlust in EUR
113.928.763	1	-2.757.352
114.028.116	2	-2.657.998
114.368.615	3	-2.317.500
114.831.992	4	-1.854.123
114.870.997	5	-1.815.117
115.042.648	6	-1.643.466
115.084.540	7	-1.601.574
115.117.428	8	-1.568.686
115.152.323	9	-1.533.791
115.270.958	10	-1.415.157
115.326.136	11	-1.359.978
115.354.634	12	-1.331.481
115.405.257	13	-1.280.857
115.435.906	14	-1.250.208
115.441.161	15	-1.244.954
115.462.134	16	-1.223.980
115.556.894	17	-1.129.220
115.623.184	18	-1.062.930

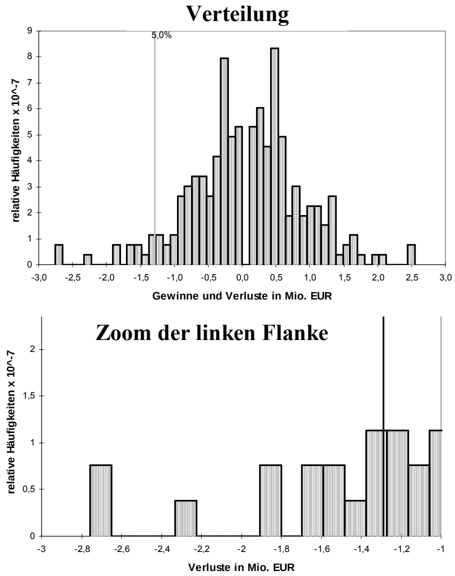


Abb. 7: Geordnete Ergebnisse der Historischen Simulation

b) Faktor- versus Portfolioansatz

Nachdem die Risikomessung mit der Historischen Simulation für nur einen Risikofaktor dargestellt wurde, soll im folgenden ein **Portfolio mit mehreren Risikofaktoren** betrachtet werden. In Anlehnung an das Beispiel beim Varianz-Kovarianz-Ansatz werden die Kupfer-Vorräte eines deutschen Konzerns betrachtet. Das Portfolio beinhaltet ein Rohstoffpreisrisiko und ein Wechselkursrisiko, weil Kupfer auf den Weltmärkten in US-Dollar gehandelt wird. Um die beiden Methoden Faktor- versus Portfolioansatz besser vergleichen zu können, wird in diesem Abschnitt die historische Simulation parallel mit der Quotienten- und der Differenzenmethode durchgeführt. Bei der Differenzenmethode werden die Differenzen zweier aufeinander folgender Marktpreise bestimmt (vgl. Tab. 2).

Die Risikoprognose erfolgt am 28.11.2000 auf Basis der Marktbeobachtungen der vergangenen 498 Tage. Im Gegensatz zu dem ersten Beispiel wird hier ein Zeitfenster der doppelten Länge gewählt. So lässt sich zum einen am Beispiel vom

Wechselkurs EUR/USD vergleichen, wie sich die Länge des Zeitfensters auf den Schätzwert für den Value at Risk auswirkt. Zum anderen wird der Vergleich mit den VaR-Schätzungen aus dem Varianz-Kovarianz-Ansatz ermöglicht.

Zeit-punkt	Kupferpreis USD/Tonne	Differenzen-methode	Quotienten-methode	Wechselkurs EUR/USD	Differenzen-methode	Quotienten-methode
t_{-498}	1.465,50			1,167		
t_{-497}	1.450,00	-15,50	-0,010633	1,167	0,000	0,000000
t_{-496}	1.433,75	-16,25	-0,011270	1,182	0,015	0,012772
t_{-495}	1.415,00	-18,75	-0,013164	1,177	-0,005	-0,004239
t_{-494}	1.421,50	6,50	0,004583	1,162	-0,015	-0,012826
t_{-493}	1.421,50	0,00	0,000000	1,168	0,006	0,005150
t_{-492}	1.441,00	19,50	0,013625	1,157	-0,011	-0,009462
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Tab. 2: Daten für den Kupferpreis und Wechselkurs EUR/USD

In dem Portfolio eines Unternehmens sind 54.690 Tonnen Kupfer enthalten, woraus am 28.11.2000 ein Marktwert von 100 Mio. USD respektive 116,69 Mio. EUR resultiert. Als Grundlage für die folgenden Risikoberechnungen werden zunächst die historischen Veränderungen der beiden Risikofaktoren mit Hilfe beider Methoden, der Differenzen- und der Quotientenmethode, bestimmt (vgl. Tab. 2).

Innerhalb der historischen Simulation können grundsätzlich zwei Ansätze zur Berechnung des Portfoliorisikos unterschieden werden, der Faktoransatz und der Portfolioansatz.[26] Bei dem **Faktoransatz** wird zunächst für die einzelnen Risikofaktoren der Value at Risk isoliert berechnet und dann unter Berücksichtigung der historischen Korrelation zu einem Value at Risk des Portfolios aggregiert (vgl. Gleichung 1). Im Beispiel ergibt sich der Value at Risk des Portfolios aus den Value at Risk Werten für das Wechselkursrisiko und das Rohstoffpreisrisiko unter Berücksichtigung einer Korrelation von 0,042152, die bereits aus dem vorangegangenen Varianz-Kovarianz-Ansatz bekannt ist.

[26] Vgl. HUSCHENS, S. (2000), S. 6 ff.

Bei Anwendung der Differenzenmethode zur Messung des **Rohstoffpreisrisikos** aus dem Standardbeispiel beträgt das 95 % - Quantil für die absoluten Kupferpreisänderungen - 26,6125 USD und - 0,011 EUR/USD für die absoluten Wechselkursänderungen. Am Betrachtungszeitpunkt 28.11.2000 beträgt der Kupferpreis 1.828,50 USD / Tonne, woraus für die Risikoberechnung ein Kupferpreis von 1.801,89 USD folgt. Mit 95 % Wahrscheinlichkeit wird der Kupferpreis am nächsten Tag nicht unter 1.801,89 USD / Tonne fallen. Das Portfolio mit 54.690 Tonnen Kupfer wird daher mit 95 % Wahrscheinlichkeit nicht unter einen Wert von 98,545 Mio. USD sinken.

Die Differenz aus dem aktuellen Portfoliowert am 28.11.2000 und dem mit 95 % Wahrscheinlichkeit nicht zu unterschreitenden Portfoliowert am nächsten Tag führt zu dem gesuchten Risikobetrag. Der Value at Risk für 54.690 Tonnen Kupfer beträgt mit 95 % Wahrscheinlichkeit - 1,455 Mio. USD. Der in Fremdwährung berechnete Value at Risk kann mit Hilfe des aktuellen Wechselkurses von 0,857 EUR/USD umgerechnet werden und beträgt in der Inlandswährung - 1,698 Mio. EUR. Bei Anwendung der Quotientenmethode beträgt der Value at Risk für das Rohstoffpreisrisiko bei gleicher Wahrscheinlichkeit - 1,820 Mio. EUR.

Bei der Kalkulation des Wechselkursrisikos ist darauf zu achten, dass statt der mit 95 % Wahrscheinlichkeit größten negativen Wechselkursänderung die positive Veränderung berücksichtigt wird. Das Risiko für den Konzern besteht in einer Aufwertung des Euro gegenüber dem US-Dollar, weil dann bei Umtausch von USD in EUR ein geringerer Wert verbleibt.

Für das **Wechselkursrisiko** ergibt sich mit jeweils 95 % Wahrscheinlichkeit bei Anwendung der Differenzenmethode ein Value at Risk von - 1,366 Mio. EUR und - 1,220 Mio. EUR mit der Quotientenmethode.[27] Die Addition der beiden mit Hilfe der Differenzenmethode berechneten Value at Risk Werte für das Rohstoff-

[27] Die Quotientenmethode lieferte zuvor bei einer Historie von 250 Tagen einen höheren Value at Risk - 1,309 Mio. EUR für das Wechselkursrisiko.

preisrisiko und Wechselkursrisiko führt unter Berücksichtigung der historischen Korrelation von 0,042152 zu einem Gesamtrisiko von - 2,224 Mio. EUR. Werden alternativ die mit der Quotientenmethode berechneten Value at Risk Werte beider Risikofaktoren aggregiert, resultiert daraus ein Portfolio Value at Risk von - 2,233 Mio. EUR.

Ebenso könnte auf Grund empirischer Beobachtungen für den Rohstoff Kupfer beispielsweise die Differenzenmethode und für den Wechselkurs EUR/USD die Quotientenmethode präferiert werden. Dann würde der Value at Risk beider Risikofaktoren - 2,132 Mio. EUR betragen. Auch die umgekehrte Kombination ist möglich. Alle denkbaren Kombinationen sind in Abb. 8 gezeigt.

Value at Risk je Risikofaktor in EUR

	Differenzen	Quotienten
Kupfer	-1.698.282	-1.820.307
EUR/USD	-1.365.812	-1.219.699

vier mögliche Kombinationen (bei einer Korrelation von 0,042152)

Value at Risk im Faktoransatz

		Kupfer	
		Differenzen	Quotienten
EUR/USD	Differenzen	-2.223.769	-2.321.326
	Quotienten	-2.132.242	-2.233.463

Value at Risk im Portfolioansatz

		Kupfer	
		Differenzen	Quotienten
EUR/USD	Differenzen	-2.238.570	
	Quotienten		-2.208.946

Abb. 8: Ansätze der Historischen Simulation

Der Vorteil des Faktoransatzes besteht darin, dass bei isolierter Betrachtung der einzelnen Risikofaktoren zwischen der Differenzenmethode und der Quotientenmethode, die empirisch jeweils bessere Alternative gewählt werden kann.[28] Beim Faktoransatz werden erst die Quantile für die einzelnen Risikofaktoren bestimmt, um sie anschließend unter Berücksichtigung der historischen Korrelation zu aggregieren.

[28] Vgl. HUSCHENS, S. (2000), S. 7.

Die zweite Alternative zur Berücksichtigung mehrerer Risikofaktoren stellt der **Portfolioansatz** dar.[29] Hierbei wird nicht der bei einer bestimmten Wahrscheinlichkeit schlechteste Wert des einen Risikofaktors mit dem schlechtesten Wert des anderen verknüpft, sondern es erfolgt eine Neubewertung des Portfolios mit den Werten der Risikofaktoren von jeweils einem Tag in der Vergangenheit. Implizit wird dabei unterstellt, dass die Veränderungen mehrerer Risikofaktoren in der Zukunft in der gleichen Kombination auftreten werden, wie es in der Vergangenheit beobachtet wurde.

Das erste Szenario ergibt sich im Beispiel bei Anwendung der Differenzenmethode aus dem aktuellen Kupferpreis abzüglich der Differenz, die vor 498 Tagen gemessen wurde und dem aktuellen Wechselkurs zuzüglich der Differenz, die vor 498 Tagen gemessen wurde (vgl. Tab. 2). In der gleichen Weise werden mit Hilfe der historisch paarweise aufgetretenen Veränderungen 497 weitere Simulationsläufe generiert. Die simulierten Gewinne und Verluste sind der Größe nach zu ordnen, woraus das gesuchte 95 % - Quantil ablesbar ist. Der Portfolioansatz mit der Differenzenmethode führt zu einem Value at Risk von - 2,238 Mio. EUR.

Für die Anwendung der **Quotientenmethode** gilt das gleiche Prinzip der Neubewertung des Portfolios mit den historischen Wechselkurs- und Rohstoffpreiskombinationen der vergangenen 498 Handelstage. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % beträgt der Verlust des Portfolios nach dieser Methode binnen 1 Tages nicht mehr als 2,209 Mio. EUR.

c) Kritische Analyse der Historischen Simulation

Für die Historische Simulation wird keine Verteilungsannahme benötigt und keine Annahme darüber, ob sich die Risikofaktoren wie ein Random Walk verhalten.

---

[29] Häufig wird unter dem Begriff der historischen Simulation ausschließlich der Portfolioansatz gezeigt. Vgl. DEUTSCH, H.-P. (2001), S. 410; HULL, J. C. (2001), S. 506; JORION, P. (1997), S. 193 ff.

Der Ansatz ist frei von Modellannahmen.[30] Der Faktoransatz benötigt eine historische Korrelation. Im Portfolioansatz werden in den Bewertungsdaten implizit die Korrelationen aus der Vergangenheit berücksichtigt. Durch Transformation der Bewertungsdaten aus der Vergangenheit werden Szenarien für die Risikofaktoren in der Zukunft generiert. Daraus ergeben sich zwei **Nachteile** der historischen Simulation. Zum einen muss ein großer Datenhaushalt verarbeitet werden und zum anderen lautet die **entscheidende Prämisse**: Was es in der Vergangenheit nicht gab, wird es auch in der Zukunft nicht geben, denn das Modell arbeitet mit historischen Beobachtungen und es lassen sich nur Dinge prognostizieren, die schon passiert sind. Zukunftsorientierte Marktdaten wie implizite Volatilitäten werden nicht berücksichtigt.

Zu einer falschen Value at Risk Berechnung kann es mit der Historischen Simulation insbesondere bei Derivaten kommen. Die Effekte aus einer Verkürzung der Restlaufzeit von Derivaten können nicht erfasst werden, denn im Gegensatz zu den analytischen Value at Risk Modellen besteht bei der Historischen Simulation nicht die Möglichkeit, das Theta-Risiko zu berücksichtigen. Das Theta ist die Rate, mit der sich der Wert des Portfolios im Zeitablauf ändert, wenn alle anderen Faktoren konstant bleiben.[31] Die Historische Simulation geht für ihre Risikoprognose ebenfalls davon aus, dass der dem Risiko ausgesetzte Betrag im Zeitablauf konstant bleibt.[32]

Die Historische Simulation ist wegen ihres geringen mathematischen Anspruchs einfach zu implementieren. Der Portfolioansatz in Verbindung mit der Differenzenmethode erfordert nahezu keine statistischen und mathematischen Kenntnisse. Ein Backtesting zu diesem Simulationsverfahren ist im Anhang zu finden.

[30] Vgl. DEUTSCH, H.-P. (2001), S. 410.

[31] Vgl. HULL, J. C. (2001), S. 452 und HUSCHENS, S. (2000), S. 9. Allerdings wird auch bei dem Varianz-Kovarianz-Ansatz in der Regel kein Theta berücksichtigt. Es könnte aber jederzeit über eine Taylor-Approximation eingefügt werden.

[32] Vgl. JORION, P. (2001), S. 223.

3 Die Monte Carlo Simulation

a) Die Generierung von Zufallszahlen

Die Monte Carlo Simulation wird häufig für die Lösung komplexer Aufgaben wie z.B. zur Messung finanzieller Risiken in Unternehmen vorgeschlagen.[33] Es handelt sich dabei um ein Simulationsverfahren auf Basis von Zufallszahlen.

Die **Generierung von Zufallszahlen** ist der wesentliche Unterschied zwischen der Monte Carlo Simulation und der Historischen Simulation. Die zukünftige Entwicklung von Risikofaktoren ist mit Unsicherheit behaftet. Statt der Verwendung von historischen Wertänderungen wird die Unsicherheit über das zukünftige Verhalten der Risikofaktoren mit Zufallszahlen angegangen. Für die benötigten Marktbeobachtungen werden Marktszenarien simuliert. Für jedes Marktszenario wird der Portfoliowert berechnet und gespeichert. Die Portfoliowerte aus allen Marktszenarien ergeben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die zukünftigen Gewinne und Verluste. Damit findet die „Marktbeobachtung“ und die Einschätzung zukünftiger Marktentwicklungen per Simulation statt.

Die Anzahl der zu berücksichtigenden Marktszenarien kann beliebig groß vorgegeben werden. Deshalb ist die Simulation von beliebigen Verteilungen für Portfoliowertänderungen möglich. Die Monte Carlo Simulation wird am Beispiel des bereits bekannten Portfolios mit Kupfer im Wert von 100 Mio. USD vorgestellt. Vereinfachend wird zunächst angenommen, dass die logarithmierten Veränderungen des Kupferpreises und Wechselkurses EUR/USD jeweils normalverteilt sind. Die Risikoberechnung erfolgt am 28.11.2000 für eine Haltedauer von einem Tag und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.

Im ersten Schritt gilt es, **standardnormalverteilte Zufallszahlen** zu erzeugen. Diese Aufgabe wird in der Regel von einem Computer erfüllt. Weil die Zufalls-

[33] Vgl. JORION, P. (2001), S. 368 ff.; PFENNIG, M. (2000), S. 1303.

zahlen mit einer Funktion oder einem Algorithmus generiert werden, ist die Bezeichnung Pseudozufallszahlen gebräuchlich. Diese Zufallszahlen sind nicht wirklich absolut zufällig und können sich nach einer bestimmten Sequenz wiederholen. Je nach der Güte des Algorithmus ist diese Sequenz kurz oder lang. Echte Zufallszahlen können nicht von Programmen generiert werden. Dennoch kann die Qualität der Zufallszahlen bei Bedarf durch statistische Verfahren verbessert werden.[34]

In der Praxis sind Portfolios häufig mehreren Risikofaktoren ausgesetzt, so dass es einer **multivariaten Simulation** bedarf. Damit auch Korrelationen für die Value at Risk Berechnung berücksichtigt werden können, sind diese bei der Erzeugung von Zufallszahlen zu berücksichtigen. Die zunächst unkorrelierten Zufallszahlen sind in **korrelierte Zufallszahlen** zu überführen. In der Literatur wird für diesen Zweck häufig die Cholesky-Zerlegung vorgeschlagen.[35] Für eine detaillierte Darstellung wird auf die entsprechenden Quellen verwiesen.[36]

unkorrelierte Zufallszahlen					korrelierte Zufallszahlen	
X	Y				X	Y
0,0815	0,9516				0,0815	0,9542
0,6459	0,9685				0,6459	0,9949
0,0647	0,7717	·	$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}042152 \\ 0 & 0{,}999111 \end{pmatrix}$	=	0,0647	0,7737
0,9556	0,1909				0,9556	0,2310
0,9635	0,7049				0,9635	0,7449
0,1481	0,9176				0,1481	0,9230
0,5199	0,5660				0,5199	0,5874
0,6729	0,6704	←		Korrelation	0,6729	0,6981
0,8774	0,0265	Korrelation		0,042 →	0,8774	0,0634
0,3371	0,4523	0,000			0,3371	0,4662
0,7396	0,1745				0,7396	0,2056

Abb. 9: Transformation von unkorrelierten in korrelierte Zufallszahlen

Zur Berechnung des Standardbeispiels mit einem aus Kupfervorräten bestehenden Portfolio werden zwei korrelierte Reihen von Zufallszahlen benötigt. Die zu be-

[34] Vgl. GENTLE, J.E. (1998), S. 1 ff.

[35] Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 165 f.; HULL, J. C. (2001), S. 581; OEHLER A./ UNSER M. (2001), S. 160.

[36] Vgl. ZANGARI, P. (1996a), S. 253. ff. Ebenso: DEUTSCH, H.-P. (2001), S. 174 ff., 376 ff.

rücksichtigende Korrelation zwischen den logarithmierten Wechselkursänderungen EUR/USD und den logarithmierten Kupferpreisänderungen beträgt auf Basis von 498 Beobachtungen 0,0421520.

Die in Abb. 9 gezeigten Reihen von Zufallszahlen X und Y dienen der Simulation der beiden Risikofaktoren. Dabei steht die Reihe X für die logarithmierten Veränderungen des Kupferpreises und Y steht für die logarithmierten Veränderungen des Wechselkurses EUR/USD. Es werden 10.000 Zufallszahlen pro Risikofaktor erzeugt, wovon jeweils die ersten 11 Zahlen in der Abb. 9 zur Illustration gezeigt sind. Im nächsten Schritt werden die beiden Reihen unkorrelierter normalverteilter Zufallszahlen mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung in korrelierte Zufallszahlen überführt.

b) Das Simulations-Verfahren

Nachdem alle benötigten Daten aufbereitet sind, kann die Simulation der Wertveränderungen des betrachteten Portfolios beginnen. Für die Risikoberechnung wird der Portfolioansatz gewählt und es werden die logarithmierten Veränderungen der Vermögenspositionen simuliert. Die einzelnen Schritte sind identisch zum Vorgehen bei der Historischen Simulation im Portfolioansatz mit der Quotientenmethode (vgl. Abb. 10).

Das nachfolgende Beispiel enthält 10.000 Simulationsläufe. Im Anschluss werden die simulierten Wertänderungen der Größe nach geordnet. Der Value at Risk für einen Tag Haltedauer und 95 % Wahrscheinlichkeit beträgt - 2.424.325 EUR (bei 99 %: - 3.457.484 EUR).

Simulierte Änderungen		Simulierte Marktpreise		Marktwert	Wertänderung
Kupfer	Wechselkurs	Kupfer	Wechselkurs	Portfolio	Portfolio
0,081472	0,954209	1830,23	0,862277	116.082.434	-604.456
0,645938	0,994888	1842,26	0,862503	116.814.681	127.790
0,064714	0,773729	1829,87	0,861277	116.194.703	-492.187
0,955603	0,231003	1848,89	0,858275	117.812.756	1.125.865
0,963496	0,744898	1849,06	0,861117	117.434.642	747.751
0,148122	0,922983	1831,65	0,862104	116.195.586	-491.304
0,519942	0,587391	1839,57	0,860245	116.950.225	263.335
0,672891	0,698134	1842,83	0,860858	117.074.526	387.635
0,877387	0,063447	1847,21	0,857350	117.832.832	1.145.941
0,337057	0,466155	1835,67	0,859574	116.793.364	106.474

$1.828{,}50 \cdot e^{(0{,}337057 * 0{,}0116037)}$ $0{,}857 \cdot e^{(0{,}466155 * 0{,}0064336)}$

$$\frac{54.690 \text{ Tonnen} \cdot 1.835{,}67 \text{ USD/Tonne}}{0{,}859574 \text{ EUR/USD}} = 116{,}79 \text{ Mio. EUR simulierter MW}$$

- 116,69 Mio. EUR - aktueller MW

Beispiel: eine von 10.000 simulierten Wertänderungen des Portfolios

\+ 0,10 Mio. EUR = Wertänderung

Abb. 10: Monte Carlo Simulation (mit Korrelationen)

In der Literatur werden häufig Kovarianzen für die Cholesky-Zerlegung verwendet.[37] Das Ziel, aus unabhängigen Zufallszahlen korrelierte Zufallszahlen zu erzeugen, kann auf beiden Wegen erreicht werden. Der übliche Weg besteht darin, zunächst standardnormalverteilte Zufallszahlen zu erzeugen. Im nächsten Schritt wird die Kovarianzmatrix mit der Cholesky-Zerlegung aufgespalten und die Zeilenvektoren der standardnormalverteilten Zufallszahlen werden mit der Choleskymatrix multipliziert.

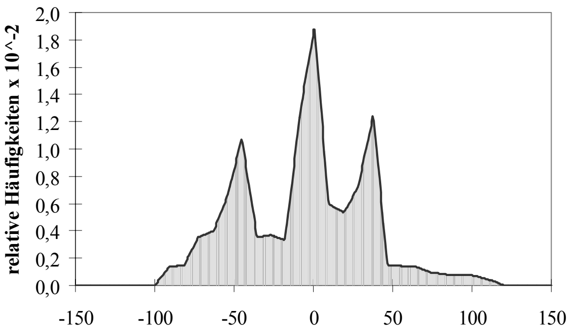
Der zweite Weg besteht darin, normalverteilte Zufallszahlen zu genieren, deren Standardabweichung bereits den gewünschten Wert beinhaltet. Um beispielsweise die Zufallszahlen für die Simulation von logarithmierten Veränderungen des Kupferpreises zu generieren, ist bei der Erzeugung der Zufallszahlen die Standardabweichung der Log-Änderungen vorgegeben. Die noch fehlenden Korrelationen werden durch die Multiplikation mit einer Korrelationsmatrix aus der Cholesky-

[37] Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 166; DEUTSCH, H.P. (2001), S. 174 ff., 376; HULL, J. C. (2001), S. 581; JORION, P. (2001), S. 303; ZANGARI, P. (1996a), S. 254 f.;

Zerlegung eingefügt, woraus multivariat normalverteilte Zufallszahlen mit den gewünschten Eigenschaften entstehen. Wegen der **Summenstabilität der Normalverteilung** sind beide Wege möglich. Die Cholesky-Zerlegung wurde anhand der Korrelationsmatrix vorgeführt, weil Korrelationen gegenüber den sehr kleinen Kovarianzwerten übersichtlicher sind.

c) Kritische Analyse der Monte Carlo Simulation

Die Monte Carlo Simulation gilt wegen ihrer Flexibilität gegenüber anderen Verfahren als überlegen, insbesondere bei der Risikomessung von komplexen Exposures wie sie z.B. aus Derivaten resultieren.[38] Das Verfahren kann Restlaufzeitverkürzungseffekte, Volatilitätsclustering, fat tails, nichtlineare Exposures und Extremszenarios in der Risikoberechnung berücksichtigen.[39] Bei Portfolios mit einem erhöhten Anteil an Optionen ist eine Monte Carlo Simulation die einzige praktikable Methode. In Abb. 11 ist die Verteilung der Gewinne und Verluste eines Hypothekenportfolios in USD mit komplexen Optionen gezeigt. Auf Grund des erhöhten Optionsanteils ist die Renditeverteilung so komplex, dass sie mit einem analytischen Ansatz nicht beschrieben werden kann.



Verteilung der Gewinne und Verluste des Portfolios der U.S. Government National Mortgage Association (GNMA).

Quelle: JORION, P. (1997), S. 245.

Abb. 11: Portfolio mit erhöhtem Optionsanteil

[38] Vgl. BUTLER, C. (1999), S. 156; DEUTSCH, H-P. (2001), S. 165; JORION, P. (2001), S. 291. KNÖCHLEIN, G./ LIERMANN, V. (2000), S. 386 ff.

[39] Vgl. DEUTSCH, H-P. (2001), S. 407 ff., 412 f.; JORION, P. (2001), S. 225.

Ein Nachteil, den die Literatur speziell mit der Monte Carlo Simulation in Verbindung bringt, ist ihre **Rechenintensität**. Die Methode benötigt hohe Rechenkapazitäten und kann für große Portfolios viel Zeit in Anspruch nehmen.[40] Hier gilt es, zwischen Geschwindigkeit und Genauigkeit der Risikoprognose abzuwägen. Weniger Simulationen erhöhen grundsätzlich den Schätzfehler.

Bei JORION findet sich eine Übersicht von Untersuchungen der Zuverlässigkeit von Prognosen für alle hier gezeigten Value at Risk Modelle.[41] Während bei einem einfachen Portfolio ohne Optionen keine wesentlichen Unterschiede zwischen den Modellen in der Aussagekraft erkennbar sind, wird die Überlegenheit der Monte Carlo Simulation für ein Portfolio mit Optionen deutlich. Bei der Prognose des Value at Risk verschätzte sich die Delta-Normal-Methode bei Verwendung einer Wahrscheinlichkeit von 99 % im Durchschnitt um 5,34 %. Für die gleiche Wahrscheinlichkeitsaussage machte die Delta-Gamma-Methode im Durchschnitt einen Schätzfehler von 4,72 %, während der Fehler der Monte Carlo Simulation mit Vollbewertung 0 % betragen hat.[42] Gleichzeitig hat die Monte Carlo Simulation mit einer durchschnittlichen Rechenzeit von 66,27 Sekunden die meiste Zeit benötigt, während die Delta-Normal-Methode mit 0,08 Sekunden am schnellsten war. In beiden Kennzahlen, dem Schätzfehler und der Rechenzeit kommen die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren zum Ausdruck.

Der Aufwand einer Monte Carlo Simulation ist bei den heute verfügbaren Rechenkapazitäten erst gerechtfertigt, wenn komplexe Risikostrukturen vorliegen oder eine nicht zu unterschätzende Anzahl von Derivaten im Portfolio gehalten wird. Für die „einfachen" Risikostrukturen, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen Veränderungen der Risikofaktoren und Wertänderungen des Portfolios

40 Vgl. MATTEN, C. (1996), S. 85.
41 Vgl. JORION, P. (2001), S. 228.
42 Die Schätzfehler beziehen sich auf die durchschnittliche Abweichung des geschätzten Value at Risk von dem tatsächlichen Verlust. Es sind folglich Fehler, die aus den vereinfachenden Annahmen der Modelle entstehen. Davon ist der Fehler zu unterscheiden, der bei einem Backtesting gemessen wird. Vgl. JORION, P. (2001), S. 228.

besteht, ist ein Varianz-Kovarianz-Ansatz ebenso ausreichend wie eine Historische Simulation.