

## VIII. Quantifizierung von Risiken im Finanzbereich

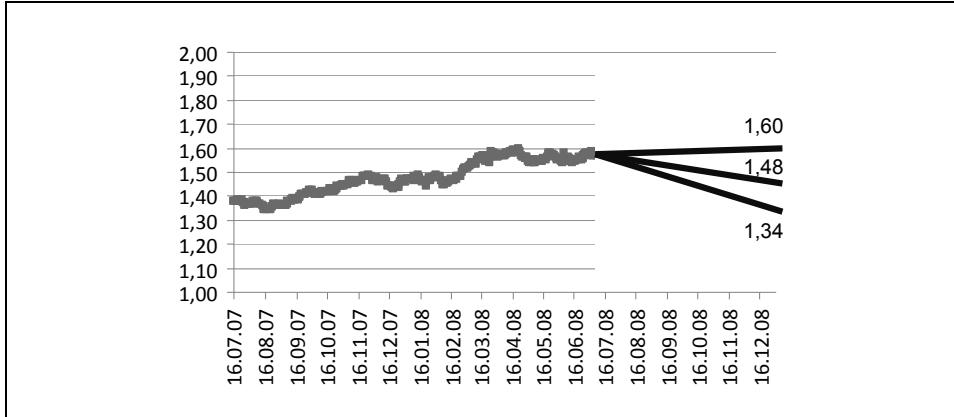
### 1. Das Drei-Werte-Verfahren

Traditionell verwenden Risikoanalysen im Treasury (Vermögensbereich) punktgenaue Schätzungen auf Basis ausgewählter Szenarien für die zu prognostizierenden Variablen. Dabei wird zwischen erwarteten Szenarien (Normalszenarien) und unerwarteten Szenarien mit extremen Auswirkungen (Stressszenarien) unterschieden. Die Szenarioanalysen erfreuen sich in der Praxis einer großen Beliebtheit, da sie im Vergleich zu statistischen Analysen schnell und einfach durchführbar sind. Am bekanntesten ist die Risikoanalyse mit dem Drei-Werte-Verfahren, das einen optimistischen (besten), einen pessimistischen (schlechtesten) und einen erwarteten (normalen) Wert enthält. Der erwartete Wert wird für „am wahrscheinlichsten“ gehalten, wobei es sich in der Regel um eine vom Anwender subjektiv empfundene, auf Erfahrungen beruhende Wahrscheinlichkeit handelt. Die optimistischen Werte bilden den besten Fall (engl. „best case“), die pessimistischen Werte den schlechtesten Fall (engl. „worst case“) und das vom Anwender erwartete Szenario setzt sich aus den für ihn wahrscheinlichsten Werten zusammen.

Eine Grundlage für die Definition von Szenarien unter alternativen Rahmenbedingungen bietet traditionell die Betrachtung der Vergangenheit, besser wären jedoch zukunftsgerichtete Szenarien. Im Beispiel erfolgt die Betrachtung eines deutschen Unternehmens, das auf einem Fremdwährungskonto Vermögen in USD hält, um damit zukünftige Importe zu bezahlen. Mit Hilfe einer Szenarioanalyse wird der Gegenwert des Vermögens in EUR zum nächsten Bilanzstichtag simuliert. Die Risikoprognose erfolgt am 30.06.2008 mit einem Prognosehorizont von sechs Monaten auf den 31.12.2008. Auf Basis der Historie vom 16.07.2007 bis zum 30.06.2008 (250 Handelstage) wurde als bester Wechselkurs 1,34 EUR/USD und als schlechtester Wechselkurs 1,60 EUR/USD beobachtet. Folglich wird unterstellt, dass auch in den nächsten zwölf Monaten ein EUR nicht mehr als 1,60 USD und nicht weniger als 1,34 USD kosten wird (vgl. Abbildung VIII.1). Im Mittelwert lag der Wechselkurs in der betrachteten Historie bei 1,48 EUR/USD und aus diesem Wert wird das normale (erwartete) Szenario gebildet.

Neben dem Wechselkurs gibt es eine zweite Unbekannte zum Bilanzstichtag: Den dann noch vorhandenen Bestand an Vermögen in USD. Dieser Vermögensbestand ist abhängig von der Anzahl der in den nächsten sechs Monaten noch zu importierenden Waren. Bei einer hohen

Inlandsnachfrage und einem damit starken Importgeschäft wird sich der Vermögensbestand in USD zum Bilanzstichtag nach der Schätzung des Unternehmens noch auf 5.000.000 USD belaufen. Sollte die Inlandsnachfrage sehr schlecht sein, werden weniger Importe benötigt und es bleibt schätzungsweise 12.000.000 USD Fremdwährungsbestand zum 31.12.2008. Treten exakt die Planwerte des Unternehmens für den Import ein, wird der Fremdwährungsbestand auf 8.000.000 USD sinken. Aus den drei Prognosewerten für den Wechselkurs und den drei geschätzten Fremdwährungsbeständen ergeben sich die in Abbildung VIII.2 gezeigten neun Realisationen für das von USD in EUR konvertierte Vermögen zum nächsten Bilanzstichtag.



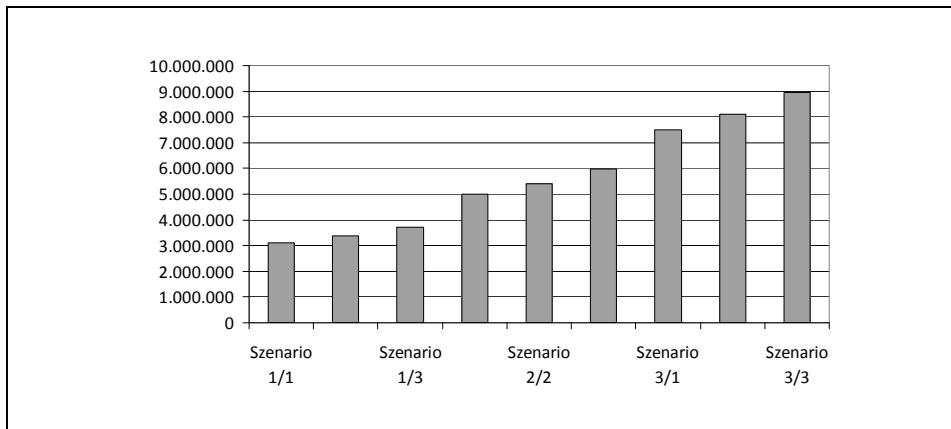
**Abbildung VIII.1:** Schwankende Wechselkurse und Unternehmensplanung

Der beste Fall in Abbildung VIII.2 setzt sich zusammen aus dem bestmöglichen Importergebnis und damit dem geringsten Fremdwährungsbestand in USD von 5.000.000 und dem günstigsten Wechselkurs von 1,34 EUR je USD ( $5 \text{ Mio. USD} : 1,34 \text{ EUR/USD} = 3,125 \text{ Mio. EUR}$ ). Im schlechtesten Fall beträgt der Fremdwährungsbestand 12.000.000 USD und der Wechselkurs notiert bei 1,60 EUR je USD ( $= 12 \text{ Mio. USD} : 1,60 \text{ EUR/USD} = 7,5 \text{ Mio. EUR}$ ). Den erwarteten Fall bildet die Kombination aus dem erwarteten Fremdwährungsbestand von 7.000.000 USD bei geplantem Importgeschäft und dem mittleren Wechselkurs von 1,48 EUR je USD. Abbildung VIII.2 fasst alle neun Szenarien in einer Übersicht zusammen.

Die Spannbreite des denkbaren Fremdwährungsbestands liegt in EUR konvertiert per 31.12.2008 zwischen 3.125.000 EUR und 8.955.224 EUR im schlechtesten Fall. Welche der neun Realisationen eintreten wird, ist unsicher. Zur Unterstützung der Planung lässt sich das arithmetische Mittel aus den neun Szenarien berechnen. Zunächst wird vereinfachend unterstellt, dass alle neun Szenarien gleichwahrscheinlich seien.<sup>315</sup> In der Statistik wird eine Ver-

<sup>315</sup> Das ist eine stark vereinfachende Annahme zu Beginn, denn die Kombination aus dem schlechtesten Importgeschäft (= größter Fremdwährungsbestand) und dem ungünstigsten Wechselkurs von 1,60 EUR/USD dürfte weniger wahrscheinlich sein als eine Kombination aus einem moderaten Wechselkurs und dem geplanten Importgeschäft.

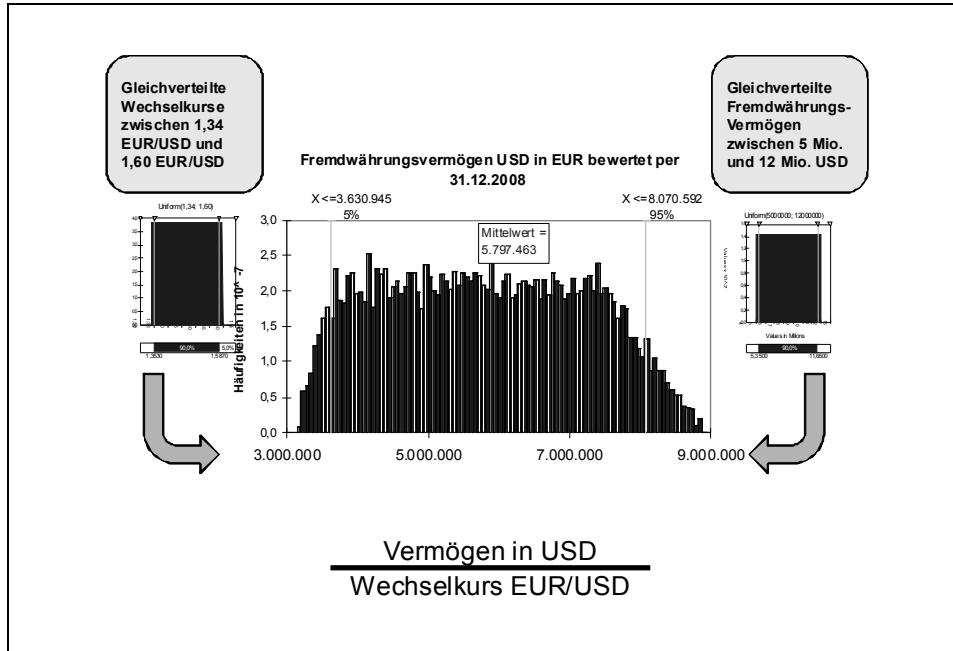
teilung, bei der alle Realisationen einer diskreten Zufallsvariable gleichwahrscheinlich sind, als Gleichverteilung bezeichnet. Das arithmetische Mittel beträgt in diesem Beispiel 5.685.956 EUR. Bisher wurden keine statistischen Verteilungen für den Wechselkurs EUR/USD und den Fremdwährungsbestand in USD benötigt. Jedes Szenario besteht bisher aus der Kombination von einem der drei Wechselkurse mit einem der drei Fremdwährungsbestände. Zur Ermittlung des arithmetischen Mittels bei neun Szenarien wurde mangels besserer Kenntnis angenommen, dass alle neun Szenarien gleichwahrscheinlich sein mögen. Die (diskrete) Gleichverteilung bezog sich auf die Eintrittswahrscheinlichkeiten der neun Szenarien.



**Abbildung VIII.2:** Szenarioanalyse des Fremdwährungsbestands für ein Beispielunternehmen

Im nächsten Schritt wird für den Wechselkurs und für den Fremdwährungsbestand zum Bilanzstichtag (und damit für die geleisteten Importe) jeweils eine Gleichverteilung verwendet. Dabei sind nicht nur die zuvor ermittelten besten und schlechtesten Werte zulässig, sondern auch alle Werte dazwischen. Das bedeutet, dass in der Simulation alle denkbaren Wechselkurse zwischen 1,34 und 1,60 mit allen denkbaren Fremdwährungsbeständen zwischen 5.000.000 USD und 12.000.000 USD kombiniert werden. Aus den zuvor neun Szenarien werden nun beliebig viele Szenarien, im Beispiel sind es gewählte 10.000. Abbildung VIII.3 zeigt die Häufigkeitsverteilung für das in EUR konvertierte Fremdwährungsvermögen aus USD zum Bilanzstichtag 31.12.2008.

Abbildung VIII.3 zeigt als Eingangsgrößen die Wechselkurse und Fremdwährungsvermögen jeweils am oberen Rand als Gleichverteilung angedeutet. Die Verteilungen haben die Form eines Rechtecks, da alle Realisationen von Wechselkursen bzw. Fremdwährungsvermögen innerhalb der angegebenen Intervalle jeweils die gleiche relative Häufigkeit haben. Für beide Eingangsgrößen werden aus Zufallszahlen jeweils 10.000 Werte innerhalb der angegebenen Intervalle generiert und mit Hilfe der Division „Fremdwährungsvermögen in USD“ geteilt durch „Wechselkurs EUR/USD“ zu der Häufigkeitsverteilung in der Mitte der Abbildung VIII.3 verdichtet.



*Abbildung VIII.3: Risikoanalyse mit 10.000 Szenarien*

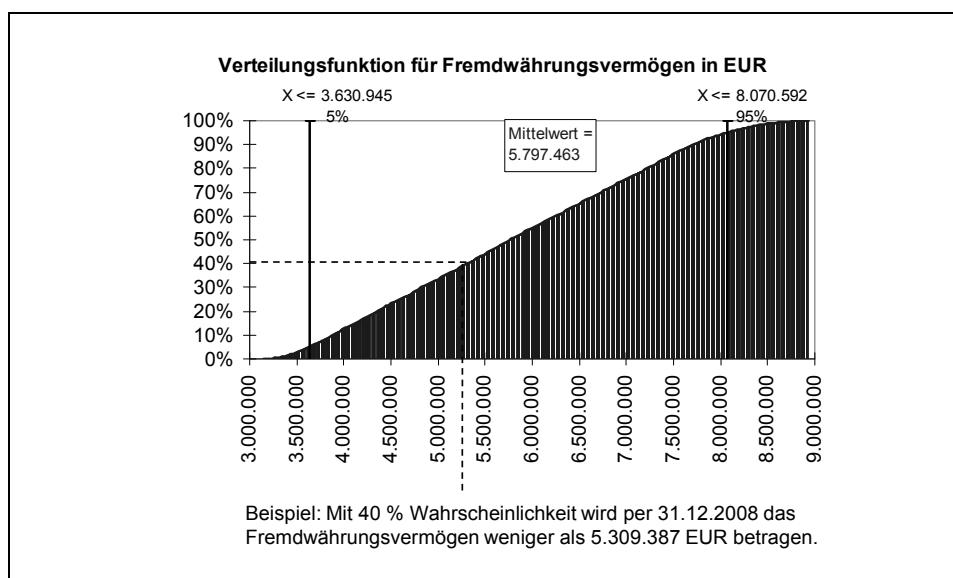
Im unteren Teil der Abbildung VIII.3 werden die simulierten Fremdwährungsbestände in EUR in einer Häufigkeitsverteilung mit 100 Klassen dargestellt. Auf der Abszisse (x-Achse) der Häufigkeitsverteilung werden die in Größenklassen erfassten Realisationen der Fremdwährungsvermögen in EUR und auf der Ordinate (y-Achse) die korrespondierenden relativen Häufigkeiten abgetragen. Die relativen Häufigkeiten ergeben sich aus der Anzahl der Beobachtungen je Größenklasse in Relation zur Gesamtzahl der Beobachtungen. Wenn beispielsweise zwei von 10.000 Szenarien zu einem Fremdwährungsvermögen in EUR zwischen 3.200.000 EUR und 3.260.000 EUR führen, beträgt die relative Häufigkeit für diese Größenklasse 0,0002 (= 2/10.000) respektive 0,02 Prozent. An den beiden Extrema für das Fremdwährungsvermögen in EUR hat sich auch bei der Simulation von 10.000 Szenarien nichts geändert. Der niedrigste Wert liegt noch immer bei 3.125.000 EUR und der höchste Wert bei 8.955.224 EUR. Aus der Kombination von zwei gleichverteilten Variablen ergibt sich aber keine Gleichverteilung der Ergebnisgröße. Die Erklärung für diesen Effekt besteht darin, dass viele Kombinationen von Fremdwährungsbeständen in USD (nach Importen) und Wechselkursen zu Fremdwährungsvermögen in EUR im mittleren Bereich führen, wohingegen beispielsweise das minimale Fremdwährungsvermögen in EUR von 3.125.000 EUR nur bei einer einzigen Kombination möglich ist.

Das arithmetische Mittel steigt bei 10.000 Szenarien auf 5.797.463 EUR im Vergleich zu 5.685.956 EUR bei nur neun Szenarien. Aus der Häufigkeitsverteilung kann abgezählt werden, dass in circa 95 Prozent der Szenarien ein Fremdwährungsvermögen in EUR von weni-

ger als 8.070.000 EUR erreicht wird. Das Abzählen der relativen Häufigkeiten in der Häufigkeitsverteilung ist jedoch aufwendig. Die relativen Häufigkeiten für das Fremdwährungsvermögen in EUR lassen sich als kumulierte Häufigkeiten in einer empirischen Verteilungsfunktion abtragen. Hierzu werden die Umsatzerlöse nach ihrer Größe aufsteigend geordnet.

Die kleinste beobachtete Realisation für das Fremdwährungsvermögen in EUR beträgt in diesem Simulationslauf 3.125.000 EUR. In der aufsteigenden Ordnung von Abbildung VIII.4 steht sie auf Rang 1 und macht 0,01 Prozent der simulierten Werte aus ( $= 1/10.000$ ). Auf Rang 2 steht ein Umsatzerlös von 3.147.104 EUR. Die kumulierte Häufigkeit für ein Fremdwährungsvermögen von höchstens 3.147.104 EUR umfasst die ersten beiden Beobachtungen bzw. 0,02 Prozent der simulierten Werte. Auf diese Weise wird Abbildung VIII.4 bis zur letzten Beobachtung vervollständigt. So beträgt beispielsweise die Unterschreitungswahrscheinlichkeit 99,96 Prozent für ein Fremdwährungsvermögen von 8.849.865 EUR, da 9.996 von 10.000 Realisationen kleiner als dieser Wert sind. Die Gegenwahrscheinlichkeit für einen Fremdwährungsvermögen von mindestens 8.849.865 EUR beträgt 0,04 Prozent ( $= 1 - 0,9996$ ), da 4 von 10.000 Realisationen auf oder über diesem Wert liegen.

Auf der Abszisse der Verteilungsfunktion in Abbildung VIII.4 sind wieder die möglichen Fremdwährungsvermögen in EUR gezeigt, auf der Ordinate lässt sich die korrespondierende kumulierte Wahrscheinlichkeit ablesen. Um beispielsweise die Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, dass das Fremdwährungsvermögen per 31.12.2008 weniger als 5.309.387 EUR betragen wird, muss von diesem Wert auf der Abszisse ausgehend eine gedachte Linie bis zur Höhe des Randes der grauen Fläche gezogen werden, auf dieser Höhe lässt sich an der Ordinate die zugehörige Wahrscheinlichkeit von 40 Prozent ablesen.



**Abbildung VIII.4:** Verteilungsfunktion auf Basis von 10.000 simulierten Szenarien

Die Wahrscheinlichkeit von fünf Prozent für die Erreichung bzw. Unterschreitung eines Fremdwährungsbestands von 3.630.945 EUR wird in der Statistik als Quantil bezeichnet. Das 5 %-Quantil sagt aus, dass fünf Prozent der beobachteten Werte kleiner oder gleich dem Quantils Wert (3.630.945 EUR) sind. Umgekehrt wird mit 95 % Wahrscheinlichkeit ein höheres Fremdwährungsvermögen als dieser Wert realisiert. Wenn eine Stichprobe zu klein ist, um das gewünschte Quantil zu bilden, wird zwischen zwei Werten interpoliert. Beispielsweise ist es bei 100 Beobachtungen zur Ermittlung des 97,5 %-Quantils erforderlich, zwischen dem 97 %- und 98 %-Quantil zu interpolieren.

Das Bild der Häufigkeitsverteilung könnte sich noch stärker ändern, wenn auch die zu Grunde liegenden Verteilungsannahmen optimiert werden. Bisher wurde angenommen, dass die 10.000 simulierten Realisationen des Wechselkurses und des Fremdwährungsvermögens innerhalb ihres jeweiligen Intervalls gleichwahrscheinlich sind. Die Intervalle wurden auf Basis historischer Beobachtungen ermittelt und die Intervallgrenzen orientierten sich an den historischen Höchst- und Tiefstkursen. Es ist fraglich, ob diese beiden Extremwerte die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit haben wie zum Beispiel moderatere Werte zwischen den Extrema. Ist ein Wechselkurs von zum Beispiel 1,40 EUR/USD ebenso wahrscheinlich wie das 250-Tage-Hoch von 1,60 EUR/USD? Ebenso könnte in Frage gestellt werden, ob die Extremwerte für Fremdwährungsbestände (und damit für Importe) gleichwahrscheinlich sind wie zum Beispiel mittlere Werte, denn die statistischen Modelle unterscheiden sich gerade darin von subjektiven Szenarioanalysen, dass sie Wahrscheinlichkeitsaussagen für das Eintreten von bestimmten Ereignissen abgeben können.

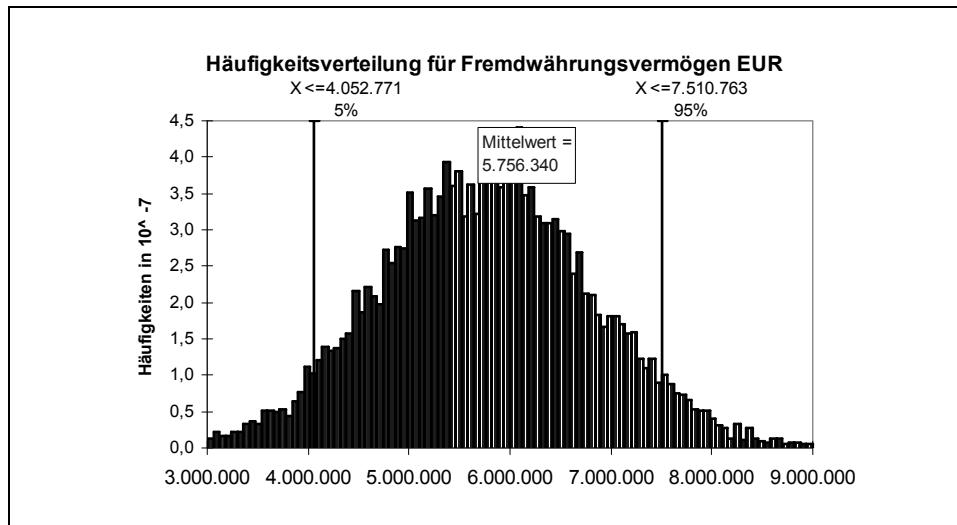


Abbildung VIII.5: Häufigkeitsverteilung auf Basis von Normalverteilungen

Die Annahme einer statistischen Gleichverteilung für alle Unbekannten war zunächst gerechtfertigt, da die Gleichverteilung für solche Fälle empfohlen wird, in denen keine Informationen über die tatsächliche Verteilung vorliegen. Für die Beschreibung der Realität hat jedoch die Gleichverteilung wenig Bedeutung. Dort treten moderate Werte mit einer größeren Wahrscheinlichkeit ein als Extremwerte. In Kapitel XII wird erklärt, wie die Verteilung von Risikofaktoren bestimmt werden kann.

Die Veränderung der Verteilungsannahmen von Gleichverteilungen auf Normalverteilungen für den Wechselkurs und den Fremdwährungsbestand hätte in diesem Beispiel zu einer anderen Einschätzung des Risikos geführt (vergleiche die Verteilung in Abbildung VIII.5 mit der Verteilung in Abbildung VIII.3).

## 2. Das Varianz-Kovarianz-Modell

Die quantitative Messung von Risiken kann grundsätzlich auf zwei Wegen erfolgen, analytisch oder durch Simulation. Für den analytischen Weg bedarf es einer Verteilungsannahme. In Kapitel XII ist gezeigt, wie die Modellierung von Risikofaktoren auf Basis eines Random Walks zu einer Normalverteilungsannahme führt. Die Normalverteilungsannahme für Risikofaktoren liegt dem *Varianz-Kovarianz-Modell* zu Grunde. Bei der Normalverteilung sind Werte um den Mittelwert am wahrscheinlichsten, die Verteilung ist symmetrisch und damit sind Abweichungen nach unten und oben vom Mittelwert möglich.

In den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften wird die Normalverteilung häufig als Näherung für die Verteilung von Unbekannten genutzt. Beispielsweise werden zufällige Messfehler bzw. Produktionsfehler gerne mit der Normalverteilung beschrieben. In der Finanz- und Versicherungsmathematik können mit der Normalverteilung Verluste und Schäden im mittleren Bereich modelliert werden. Für die Messung extrem seltener Risiken sind die Normalverteilung wie auch das gesamte Value-at-Risk-Konzept hingegen nicht geeignet. Die Value-at-Risk-Verfahren sind konzipiert für die Messung von Risiken unter normalen Umweltbedingungen, das heißt mittlere bis größere Verluste durch übliche Marktpreisschwankungen auf funktionierenden Märkten.

Der Value at Risk einer einzelnen Vermögensposition ergibt sich im Varianz-Kovarianz-Modell aus der Multiplikation von einem Marktwert mit seiner Volatilität, wobei letztere zuvor auf die gewünschte Wahrscheinlichkeit der Aussage skaliert wurde. Am Beispiel des Wechselkurses EUR/USD beträgt die historische Tagesvolatilität auf Basis der letzten 250 Tage vom 30.06.2008 ausgehend 4,60 %. Wird eine Normalverteilung der Wechselkurs schwankungen unterstellt, so beträgt die Wechselkursschwankung bei einem Ausgangswert von 1,58 EUR/USD am 30.06.2008 pro Tag  $\pm 0,07$  EUR/USD ( $= \pm 4,60\%$ ). Die Normalver-

teilung sagt aus, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von circa zwei Dritteln (68,27 %) die Abweichung vom Ausgangswert höchstens eine Standardabweichung (im Beispiel 0,07 EUR/USD) beträgt.<sup>316</sup> Mit Hilfe für die Normalverteilung definierter Faktoren (z-Werte) kann gemessen werden wie groß höchstens die Abweichung beispielsweise mit 95 Prozent ausfällt. Dazu wird die Volatilität (4,60 %) respektive die Standardabweichung (0,07 EUR/USD) mit dem Faktor 1,6449 multipliziert. Die Aussage lautet nun: Mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit wird der Wechselkurs von 1,58 EUR/USD am nächsten Tag nicht höher als 1,70 EUR/USD liegen.

Das bisher beschriebene Modell ist noch recht grob, denn meistens sind die Risikofaktoren wie hier im Beispiel der Wechselkurs EUR/USD nicht normalverteilt. Abbildung VIII.6 zeigt vergleichend die Verteilung der Wechselkurse und die Verteilung der logarithmierten Veränderungen der Wechselkurse.<sup>317</sup> Während die Wechselkurse selbst nicht normalverteilt sind, lassen sich deren Veränderungen näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung beschreiben. Diese Beobachtung gilt für die meisten Marktpreisrisiken.<sup>318</sup> Das Risiko des Unternehmens besteht auch nicht in dem Wechselkurs, sondern in seiner unerwarteten und wirtschaftlich ungünstigen Veränderung. Ausgehend von dieser Erkenntnis wird im Folgenden nur noch auf die Veränderungen der Risikofaktoren abgestellt.

Für den Wechselkurs EUR/USD beträgt die tägliche Standardabweichung der logarithmierten Veränderungen 0,00555 EUR/USD.<sup>319</sup> Bei den späteren Risikoberechnungen muss die Standardabweichung der logarithmierten Renditen wieder transformiert werden. Die Umkehrfunktion zum Logarithmieren bildet die e-Funktion (vgl. mathematischer Anhang im Kapitel XII). Der Value at Risk Wert mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit beträgt für einen Tag 1,58 EUR/USD •  $e^{(0,00555 \text{ EUR/USD} \cdot 1,6449)} = 1,59 \text{ EUR/USD}$  und für 125 Tage 1,58 EUR/USD •  $e^{(0,00555 \text{ EUR/USD} \cdot 1,6449 \cdot \sqrt{125})} = 1,75 \text{ EUR/USD}$ . Mit diesem Risikowert können anschließend Fremdwährungs- und Rohstoffbestände bewertet werden, beispielsweise die Lagervorräte von Kupfer. Die tägliche Standardabweichung der logarithmierten Veränderungen des Kupferpreises beträgt für die oben gewählte Historie 0,0180 USD. Ausgehend von einem aktuellen Kupferpreis von 8.775,50 USD per 30.06.2008 folgt daraus ein Value at Risk mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit für einen Tag von 8.775,50 USD •  $e^{(0,018 \cdot -1,6449)} = 8.519 \text{ USD}$  und für 125 Tage 8.775,50 USD •  $e^{(0,018 \cdot -1,6449 \cdot \sqrt{125})} = 6.302 \text{ USD}$ .

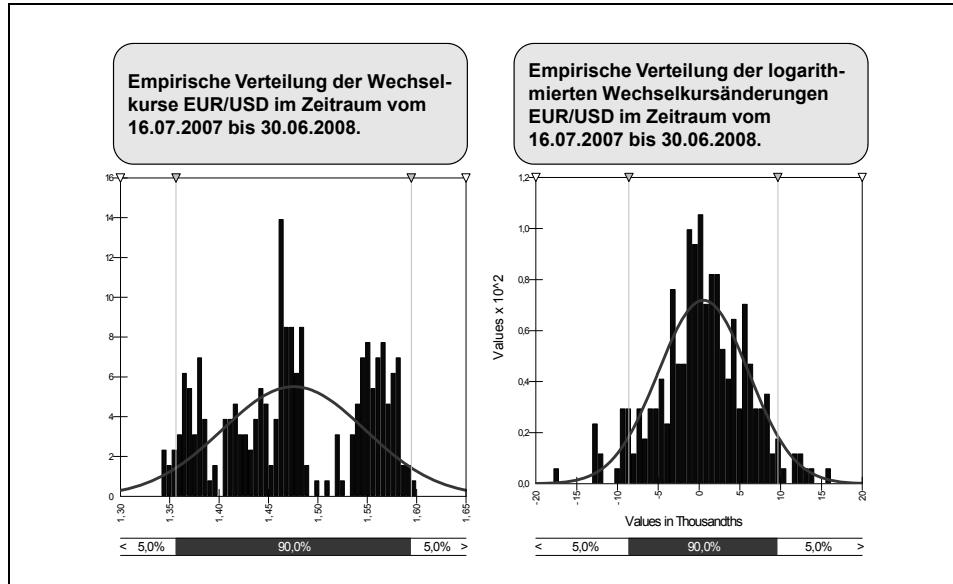
---

<sup>316</sup> Vgl. Kapitel XII.

<sup>317</sup> Zu den Eigenschaften von Werten vor und nach dem Logarithmieren und der Bedeutung für das Risikomanagement vgl. Kapitel XII.

<sup>318</sup> Vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, Kapitel B.1 bis B.2 und Anhang C.1.

<sup>319</sup> Gemessen wurden die logarithmierten Veränderungen der Wechselkurse vom 16.07.2007 bis 30.06.2008. Diese ergeben sich aus der Formel  $\ln(\text{Wechselkurs vom Vortag} : \text{Wechselkurs des aktuellen Tages})$ . Aus diesen logarithmierten Veränderungen wurde die Standardabweichung ermittelt. Für Details vgl. Kapitel XII.



**Abbildung VIII.6:** Häufigkeitsverteilung auf Basis von Normalverteilungen

Setzt sich ein Portfolio aus mehreren unterschiedlichen Vermögenspositionen zusammen, bedarf es einer Aggregation der einzelnen Value-at-Risk-Beträge zu einem Portfolio-Value-at-Risk. Bei einer einfachen Addition der Risikobeträge bleiben die häufig vorhandenen Diversifikationseffekte unbeachtet. Eine Aussage über die mögliche Diversifikationswirkung zwischen zwei Vermögenspositionen liefert deren Korrelationskoeffizient.<sup>320</sup> Die risikodiversifizierende Wirkung des Korrelationskoeffizienten wird für ein Beispiel-Portfolio berechnet. Die Inntal AG möge Kupfervorräte mit einem Marktwert von 478 Tonnen halten.<sup>321</sup> Am 30.06.2008 beträgt das Rohstoffvermögen in Kupfer bei einem Marktpreis von 8.775,50 USD je Tonne 4.194.689 USD respektive 2.654.866 EUR bei einem aktuellen Wechselkurs von 1,58 EUR/USD. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent wird der Verlust aus einer Kupferpreisänderung binnen eines Tages nicht größer als circa 122.600 USD (= 478 Tonnen • (8.775,50 – 8.519) USD) respektive ceteris paribus rund 77.600 EUR (= 122.600 USD : 1,58 EUR/USD). Denn mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit wird der Kupferpreis von 8.775,50 USD binnen eines Tages nicht unter 8.519 USD fallen, der Wechselkurs EUR/USD wird dabei konstant gehalten.

Bei einem mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit nicht höher als 1,59 notierenden Wechselkurs beträgt der Verlust aus Wechselkursschwankungen bei einem ceteris paribus konstanten Kupferpreis circa 16.700 EUR [= (478 Tonnen • 8.775,50 USD : 1,58 EUR/USD) – (478 Tonnen •

320 Die Definition und Berechnung von Korrelationen wird in Kapitel XII erläutert.

321 Der Weltmarktpreis für Rohstoffe wie Gold, Silber, Kupfer und Rohöl wird in der Regel in USD angegeben.

8.775,50 USD : 1,59 EUR/USD)]. Das Gesamtrisiko aus Kupferpreis- und Wechselkurs schwankung beträgt mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit binnen eines Tages nicht mehr als 77.600 EUR + 16.700 EUR = 94.300 EUR.

Mit der Addition beider Risiken wird unterstellt, dass das Wechselkursrisiko und das Rohstoffpreisrisiko gleichzeitig schlagend werden (Korrelation = 1). Die Korrelation zwischen EUR/USD und dem Kupferpreis liegt jedoch empirisch nahe Null, das gilt sowohl für den hier betrachteten Zeitraum vom 16.07.2007 bis zum 30.06.2008 ( $k = 0,075$ ) als auch für frühere Zeiträume ab 1998.<sup>322</sup> Mit einer Korrelation unter 1 können *Risikodiversifikationseffekte* realisiert werden, die in der bisherigen Berechnung noch nicht betrachtet wurden. Die Korrelation zwischen den beiden Risikofaktoren kann mit Hilfe von Gleichung VIII.1 berücksichtigt werden, welche an eine Formel aus dem *Portfolio-Selection-Modell* von Markowitz zur Berechnung des Portfoliorisikos im Zwei-Anlagen-Fall angelehnt ist.<sup>323</sup>

$$\text{Gleichung VIII.1: } \text{VaR}_P = \sqrt{\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2 \cdot \text{VaR}_1 \cdot \text{VaR}_2 \cdot k_{1,2}}$$

Bei Anwendung der Gleichung VIII.1 wird für den  $\text{VaR}_1$  der  $\text{VaR}_{\text{Kupfer}} = 77.600$  EUR, für den  $\text{VaR}_2$  der  $\text{VaR}_{\text{EUR/USD}} = 16.700$  EUR und für die Korrelation zwischen beiden  $k_{1,2} = 0,075$  eingesetzt. Gegenüber dem Portfolio-VaR<sub>EUR</sub> mit einer Korrelation von 1 verringert sich der Risikobetrag in Folge des nun berücksichtigten Diversifikationseffekts um 13.700 EUR auf circa 80.600 EUR.

Für die Berechnung eines Value at Risk mit mehr als zwei Risikofaktoren lässt sich Gleichung VIII.1 in eine allgemeine Form bringen mit Hilfe der Matrizenschreibweise. Bei einer Vielzahl von Risikofaktoren würde ein langer Ausdruck unter der Wurzel entstehen, namentlich u. a. die Summanden aller möglichen Zweierkombinationen von Value-at-Risk-Werten und deren Korrelationen, so dass die Überführung in eine *Matrizenbeschreibung* mehr Übersichtlichkeit verschafft. Eine Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten und wird kurz als  $m \times n$  Matrix bezeichnet.<sup>324</sup> Abbildung VIII.7 zeigt die unterschiedlichen Schreibweisen. Für eine ausführliche Darstellung der Matrizenrechnung im Varianz-Kovarianz-Modell vgl. Hager 2004 mit entsprechenden Beispielrechnungen.<sup>325</sup> Eine Excel-Datei mit Beispielen zum Varianz-Kovarianz-Modell mit einer Matrizenmultiplikation und dazugehörigen Formeln finden Sie als Download auf der Gabler Homepage ([www.gabler.de](http://www.gabler.de)).

---

<sup>322</sup> Vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, S. 104.

<sup>323</sup> Vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, S. 104 f.; Markowitz, H.: Portfolio Selection, in: Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, S. 77 ff.; Schulte-Mattler, H.; Tysiak, W.: TRI RISK: Was Pythagoras und Markowitz gemeinsam haben, in: Die Bank 2/99, S. 84-88.

<sup>324</sup> Vgl. CREMERS, H.: Mathematik und Stochastik für Banker, 2. Auflage, Frankfurt/Main 1999, S. 171.

<sup>325</sup> Vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, S. 106 ff.

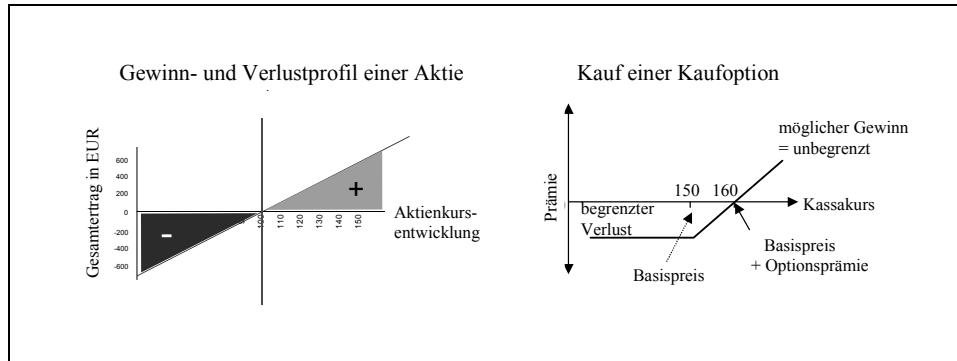
Die ausführliche Matrzenschreibweise ist im unteren Teil von Abbildung VIII.7 dargestellt. Darunter steht die Kurzform, in der  $X^T$  für den Zeilenvektor der  $x_i$ , cov für die Varianz-Kovarianz-Matrix und X für den Spaltenvektor der  $x_i$  steht. Der Zeilenvektor  $X^T$  ist die Transponente des Spaltenvektors X und trägt daher den Index T. Für den Fall zweier Anlagen sind die unteren Gleichungen identisch mit der ursprünglichen Gleichung VIII.1. Zur Verwendung der Matrzenschreibweise ist die Berechnung von Kovarianzen notwendig. Die Kovarianz zwischen zwei Risikofaktoren ist eine Kombination aus ihren Volatilitäten und der gegenseitigen Korrelation. Zwischen dem Kupferpreis und dem Wechselkurs EUR/USD lässt sich die Kovarianz beispielhaft wie folgt ermitteln  $\text{cov}_{1,2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot k_{1,2} = 0,0180 \cdot 0,00555 \cdot 0,075$ . Im nächsten Schritt wird die Varianz-Kovarianz-Matrix erstellt. Die benötigten Varianzen ergeben sich aus den quadrierten Standardabweichungen. In dem Beispiel mit Kupfer und dem Wechselkurs EUR/USD entsteht aufgrund der zwei Risikofaktoren eine zwei mal zwei *Varianz-Kovarianz-Matrix*. Aus dieser allgemeinen Schreibweise mit Matrizen ist der Name für das Risikomodell entstanden: Varianz-Kovarianz-Modell. Anschaulicher als die Matrizen mit Varianzen-Kovarianzen ist aber die in Gleichung VIII.1 vorgestellte Form mit Standardabweichungen (in den Value-at-Risk-Werten der Einzelrisiken) und Korrelationen.

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p &= \sqrt{\text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2 \cdot \text{VaR}_1 \cdot \text{VaR}_2 \cdot k_{1,2}} \\ &\downarrow \\ \text{VaR}_p &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j}} \cdot z \\ &\downarrow \\ \text{VaR}_p &= \sqrt{\left[ x_1, x_2, \dots, x_n \right] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}_{1,2} & \dots & \text{cov}_{1,n} \\ \vdots & & & \\ \text{cov}_{1,2} & \text{cov}_{2,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} \cdot z \\ &\downarrow \\ \text{VaR}_p &= \sqrt{X^T \cdot \text{cov} \cdot X} \cdot z \end{aligned}$$

**Abbildung VIII.7:** Das Varianz-Kovarianz-Modell in unterschiedlichen Schreibweisen

Das Varianz-Kovarianz-Modell existiert in zwei Varianten, dem Delta-Normal-Ansatz und dem Delta-Gamma-Ansatz.<sup>326</sup> Der *Delta-Normal-Ansatz* unterstellt, dass die Marktwerte der Positionen im Portfolio linear auf Veränderungen der Risikofaktoren reagieren und ist daher für die Risikoberechnung von Portfolios mit symmetrischen Finanzinstrumenten geeignet. Ein Beispiel für *symmetrische Finanzinstrumente* sind Aktien. Kauft ein Unternehmen eine Aktie zum Kurs von 100 EUR, so bedeutet jeder Euro Kursverlust einen gleich großen Verlust für das Unternehmen und umgekehrt erhöht jeder Kursgewinn den Gewinn des Unternehmens um den gleichen Betrag. Das Unternehmen könnte alternativ eine Kaufoption auf eine Aktie beziehen (engl. Call). Durch den Kauf eines Calls ist das Unternehmen berechtigt, aber nicht verpflichtet, eine bestimmte Anzahl von Aktien zu einem vorher vertraglich fixierten Basispreis vom Stillhalter der Option zu beziehen.

Der mögliche Verlust des Unternehmens als Inhaber des Wahlrechts ist auf die gezahlte Optionsprämie beschränkt. Sollte der Kurs der Aktie unter einen zuvor vereinbarten Basispreis von beispielsweise 95 EUR fallen, kann das Unternehmen die Aktie am Markt günstiger beziehen als durch die Ausübung der Option. Der Call auf die Aktie verfällt wertlos und die gezahlte Prämie ist verloren. Umgekehrt hat das Unternehmen unbegrenzte Gewinnchancen. Unabhängig davon, wie stark der Aktienkurs steigt, kann das Unternehmen bei Ausübung der Option die Aktie stets zu 95 EUR kaufen und am Markt zu dem entsprechend höheren Kassakurs wieder verkaufen. Dem begrenzten Verlustpotenzial steht ein unbegrenztes Gewinnpotenzial gegenüber. Im Gegensatz zur Aktie liegt bei dem Call daher ein *asymmetrisches Gewinn- und Verlustprofil* vor.<sup>327</sup> In Abbildung VIII.8 wird das symmetrische Profil einer Aktie dem asymmetrischen Profil einer gekauften Call-Option gegenübergestellt.



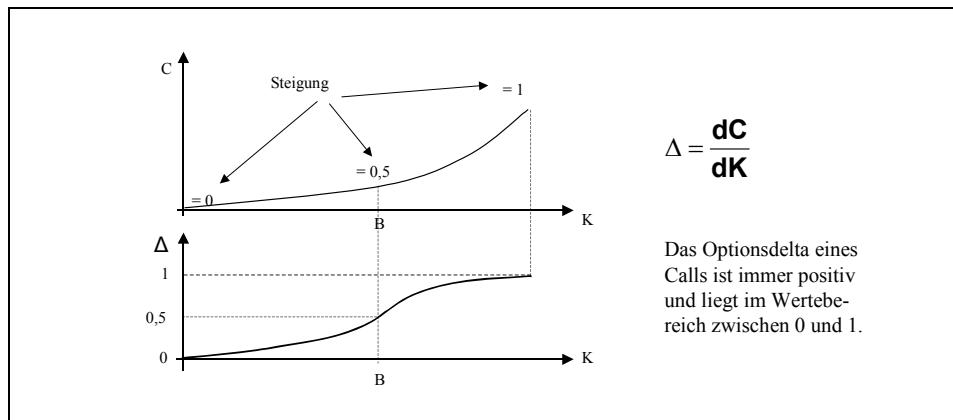
**Abbildung VIII.8:** Symmetrische und asymmetrische Derivate

<sup>326</sup> Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 489; JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 186 ff.; RAUBREDOW, H.: Überwachung von Marktpreisrisiken durch Value at Risk, in: WiSt., 6/2001, S. 317.

<sup>327</sup> Für eine ausführliche Beschreibung von Chancen und Risiken bei Swaps und Zins-Optionen vgl. WIEDEMANN, A.: Financial Engineering – Bewertung von Finanzinstrumenten, 4. Auflage, Frankfurt/Main am Main 2007.

Wie symmetrische und asymmetrische Finanzinstrumente im Delta-Normal-Ansatz berücksichtigt werden, wird an einem Beispiel gezeigt. Das Unternehmen möge ein Portfolio halten, welches aus einer Aktie und einer Option auf eine weitere gleichartige Aktie (Call) besteht. Mit der Option hat sich das Unternehmen bei Vertragsabschluss einen Bezugspreis von 95 EUR gesichert. Inzwischen möge der Kurs der Aktie (engl. Underlying der Option) auf 100 EUR gestiegen sein. Die Option ist somit „im Geld“, denn bei Ausübung könnte das Unternehmen eine Aktie zum Preis von 95 EUR beziehen, obwohl der aktuelle Marktwert bei 100 EUR liegt. Der Marktwert der Option ist daher höher als bei Vertragsabschluss, jedoch steigt der Optionspreis im Gegensatz zur Aktie nicht linear. Im oberen Teil von Abbildung VIII.8 ist der Verlauf des Optionspreises für alternative Aktienkurse skizziert.<sup>328</sup> An der Ordinate ist der Preis C der Call-Option abgetragen, an der Abszisse der Kurs K der Aktie.

Die Kurve für den Marktwert der Option in Abhängigkeit vom Aktienkurs verläuft gekrümmt. Ist der Aktienkurs weit unter dem Basispreis von 95 EUR, steigt die Kurve für den Marktwert der Option nur langsam. Die Option ist weit „aus dem Geld“ und ihre Ausübung ist unwahrscheinlich. Je weiter sich der Aktienkurs dem Basispreis annähert, desto stärker steigt die Kurve für den Marktwert. Die Option ist „am Geld“, wenn der Aktienkurs sehr dicht am Basispreis liegt. Hier ist die Unsicherheit einer Ausübung am größten. Wegen der Volatilität des Aktienkurses kann die Option noch aus dem Geld oder tiefer ins Geld wandern. Die Kurve für den Marktwert der Option ist in diesem Bereich am stärksten gekrümmt und bereits kleine Änderungen des Aktienkurses verursachen stärkere Änderungen des Optionspreises. Für einen Aktienkurs weit über dem Basispreis ist die Option tief „im Geld“, eine Ausübung ist relativ sicher und der Marktwert steigt nur noch langsam an (vgl. Abbildung VIII.9).



**Abbildung VIII.9:** Veränderung des Deltas bei einer Call-Option in Abhängigkeit des Kas- sakurses

<sup>328</sup> Die exakte Bestimmung der Optionspreise erfolgt für Aktien mit dem Black-Scholes-Modell und für Zinsoptionen mit dem Black76-Modell. Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 356 ff., 748 ff.

Die Abhängigkeit des Marktwerts der Option gegenüber dem Aktienkurs wird durch das *Optionsdelta* beschrieben.<sup>329</sup> Es bezeichnet allgemein die Preissensitivität einer Option gegenüber Veränderungen des Basisobjektpreises. Das Delta trägt den griechischen Buchstaben  $\Delta$  und berechnet sich aus der Relation der Optionspreisänderung  $dC$  für den Call zur Änderung des Kassakurses  $dK$  (vgl. Gleichung VIII.2).

$$\text{Gleichung VIII.2:} \quad \Delta = \frac{dC}{dK}$$

Graphisch entspricht das Delta der Steigung der Optionspreiskurve in Abhängigkeit von dem Kassakurs. Wie im unteren Teil der Abbildung VIII.9 zu erkennen ist, strebt das Delta für einen Aktienkurs weit unter dem Basispreis gegen Null. Der obere Teil der Abbildung VIII.9 zeigt, dass bei einem sehr niedrigen Aktienkurs die Option weit aus dem Geld ist und ihr Preis nur marginal auf eine Änderung des Aktienkurses reagiert. Daher muss das Delta in diesem Bereich sehr klein sein. Hingegen strebt das Delta gegen Eins, wenn der Aktienkurs weit über dem Basispreis liegt. Dann ist die Ausübung der Option fast sicher und jede Änderung des Aktienkurses erhöht im gleichen Verhältnis den Wert der Option.<sup>330</sup>

Für das Beispiel-Portfolio soll zum Vergleich sowohl der Value at Risk für die Aktie als auch für die Option berechnet werden. Als Tages-Volatilität der Aktie wird der Wert 1,2 Prozent angenommen und die Option möge eine Tages-Volatilität von 1,075 Prozent haben. Der Value at Risk der Aktie für eine Haltedauer von einem Tag mit 95 Prozent ( $z = -1,6449$ ) Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Produkt aus dem Aktienkurs und der mit -1,6449 skalierten Volatilität.

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{\text{Aktie}} &= \text{Kurs} \cdot z\text{-Wert} \cdot \text{Volatilität} \\ &= 100 \text{ EUR} \cdot (-1,6449) \cdot 0,012 \\ &= -1,974 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Um den Value at Risk der Call-Option zu berechnen, muss die Berechnung um das Delta erweitert werden. Für das Beispiel möge  $\Delta = 0,8113$  sein.<sup>331</sup> Die Ergänzung der Value-at-Risk-Berechnung um das Delta ist notwendig, da bei einem Kursverlust der Aktie von zum Beispiel 10 EUR die Option nur einen Wertverlust von  $\Delta \cdot 10 \text{ EUR}$  ( $0,8113 \cdot 10 \text{ EUR} = 8,11 \text{ EUR}$ ) erleiden würde. Der Optionspreis beträgt 7,80 EUR.

---

<sup>329</sup> Vgl. BUTLER, C.: Mastering Value at Risk – A step by step guide to understanding and applying VaR, Wiltshire GB, S. 93; HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 443

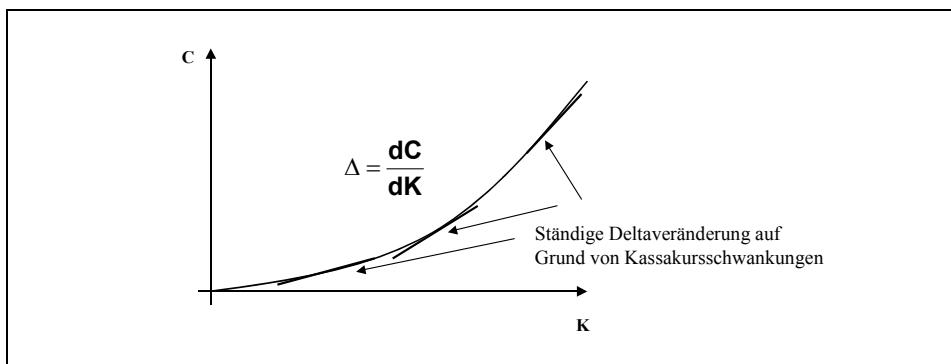
<sup>330</sup> Optionspreise bestehen aus zwei Komponenten, einem inneren Wert und einem Zeitwert. Der Zeitwert ist eine Prämie für die Unsicherheit über die Ausübung oder Nichtausübung der Option. Für eine Option weit aus dem Geld oder weit im Geld spielt diese Komponente eine absolut untergeordnete Rolle. Ist die Option weit im Geld, wird ihr Preis vorrangig durch den inneren Wert bestimmt, der sich als Differenz aus dem Marktpreis der Aktie und dem Basispreis ergibt. Der innere Wert steigt linear mit dem Aktienkurs.

<sup>331</sup> Das Delta ist identisch mit dem Wert  $N(d_1)$  aus der Optionspreisformel von Black/Scholes. Die Berechnung für das Delta und den Optionspreis mit Hilfe der Black-Scholes-Formel wird ausführlich in Kapitel XII dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \text{VaR}_{\text{Call}} &= \text{Optionspreis} \cdot \Delta \cdot z\text{-Wert} \cdot \text{Volatilität} \\
 &= 7,80 \text{ EUR} \cdot 0,8113 \cdot (-1,6449) \cdot 0,01075 \\
 \text{VaR}_{\text{Call}} &= -0,1119 \text{ EUR}
 \end{aligned}$$

Trotz der VaR-Adjustierung um das Delta der Option kommt es bei der Delta-Normal-Methode häufig zu einer *Fehleinschätzung des tatsächlichen Risikos*. In dem Beispiel befindet sich der aktuelle Aktienkurs bei 100 EUR und der Wert der Option beträgt 7,80 EUR. Bei einem Kursverlust von 2,00 EUR ändert sich der Wert der Option wegen des nichtlinearen Verlaufs der Preisfunktion nur um einen Bruchteil, der durch das Delta  $\Delta = 0,8113$  approximiert wird. Der Wert der Option fällt näherungsweise um  $0,8113 \cdot (-1 \text{ EUR})$  auf 6,17 EUR. Eine exakte Neubewertung der Option mit Hilfe der Black-Scholes-Formel führt zu einem Optionspreis von 6,24 EUR. Der Optionspreis sinkt langsamer, als es von der Delta-Normal-Methode angenommen wird. Die Differenz zwischen dem exakten und dem approximierten Wert beträgt 0,07 EUR ( $= 6,24 \text{ EUR} - 6,17 \text{ EUR}$ ). Sie entsteht dadurch, dass sich das Delta stets verändert.

Die *ständige Veränderung des Deltas* ist auf die permanent schwankenden Aktienkurse zurückzuführen. Für jeden Aktienkurs ergibt sich eine andere Steigung der Optionspreiskurve (Delta). Beispielsweise würde das Delta bei dem neuen Aktienkursniveau von 98 EUR den Wert 0,7404 statt zuvor 0,8113 haben. Aus der ständigen Veränderung des Deltas entstehen Fehler bei der Value-at-Risk-Berechnung mit der Delta-Normal-Variante des Varianz-Kovarianz-Modells (vgl. Abbildung VIII.10).



**Abbildung VIII.10:** Die ständige Veränderung des Deltas

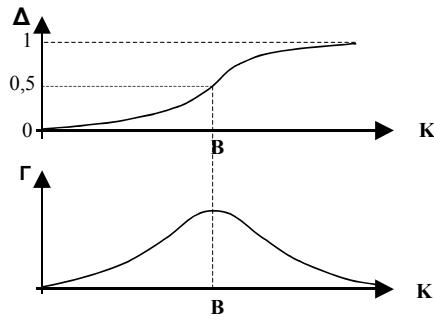
Die zweite Methode des Varianz-Kovarianz-Modells bildet der *Delta-Gamma-Ansatz*.<sup>332</sup> Darin wird die Veränderung des Deltas durch eine weitere griechische Kennzahl berücksichtigt. Das Gamma  $\Gamma$  gibt die Veränderungsrate des Deltas  $\Delta$  bezüglich der Veränderung des Kassakurses an (vgl. Abbildung VIII.11).

<sup>332</sup> Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 499; JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 191 ff.

- Das Optionsgamma gibt die Veränderungsrate des Optionsdeltas bezüglich der Veränderung des Kassakurses an:  $\Gamma(\text{Call}) = \frac{d^2 C}{dK^2}$
- Für eine Call-Option auf Aktien ohne Dividendenzahlung gilt gemäß dem Modell von Black/Scholes:  $\Gamma(C) = \frac{N'(d_1)}{K * \sigma * \sqrt{T}}$

*Abbildung VIII.11: Das Gamma*

Für das Beispiel lässt sich berechnen, wie stark sich das Delta ändert, wenn sich der Aktienkurs um 1,00 EUR verändert. Graphisch beschreibt das Gamma die Krümmung der Optionspreiskurve (vgl. Abbildung VIII.12). Die Krümmung ist dort am größten, wo der Aktienkurs nahe am Basispreis liegt, die Option also am Geld ist. In diesem Bereich ist das Gamma am größten, was bedeutet, dass dort die Steigung der Optionspreiskurve am steilsten ist und sich somit das Delta am stärksten verändert.



*Abbildung VIII.12: Das Optionsgamma beschreibt die Krümmung des Optionsdeltas*

Für das Beispiel ergibt sich für den Aktienkurs von 100 EUR ein Gamma von -0,0336.<sup>333</sup> Damit das Gamma in der Value-at-Risk-Berechnung berücksichtigt werden kann, ist zuvor eine *Taylor-Approximation* der Optionsbewertungsfunktion notwendig. Die Taylor-Approximation hat viele Verwendungszwecke bei Risikoberechnungen. Mit ihrer Hilfe lassen sich Durationsmaße, Konvexitätsmaße und auch die Formel von Black/Scholes ableiten. Zunächst wird die Taylor-Approximation an einem einfachen Beispiel vorgeführt. Gegeben

<sup>333</sup> Das Gamma bezieht sich auf eine Kursänderung der Aktie von -1 EUR. Die Formel zur Berechnung des Gammas und der ausführliche Rechenweg werden im mathematischen Anhang in Kapitel XII gezeigt.

sei eine fiktive Bewertungsfunktion  $H$  mit  $H(x) = x^5$ . Der Preis  $H$  für das fiktive Instrument ergibt sich in Abhängigkeit von  $x$ . Für  $x = 11$  wird  $H(x)$  exakt berechnet und ergibt den Wert 161.051 ( $= 11^5$ ). Die Fragestellung lautet: Wie ändert sich  $H(x)$  wenn sich  $x$  um -1 verändert, das heißt  $x = 10$  ist. Eine neue Berechnung von  $H(x)$ , mit  $x = 10$  führt zu dem Wert 100.000 ( $= 10^5$ ). Für eine Value-at-Risk-Berechnung mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz ist die Berechnung von  $H(x)$  für jedes  $x$  zu aufwendig, insbesondere wenn  $H(x)$  eine Optionspreisformel wäre. Für nichtlineare Finanzinstrumente wie Optionen muss eine *Linearisierung* der nichtlinearen Bewertungsfunktion versucht werden.

Mit Hilfe der Taylor-Approximation kann näherungsweise der Wert für  $H(10)$  berechnet werden, wenn  $H(11)$  bekannt ist. Zu diesem Zweck wird schrittweise die erste, zweite, dritte bis  $n$ -te Ableitung von  $H(x)$  gebildet und zu einer Summe verknüpft. In Abbildung VIII.13 ist die Taylor-Approximation von  $H(x)$  zunächst allgemein und darunter für das verwendete Beispiel mit  $H(x) = x^5$  gezeigt. Die erste Ableitung von  $H(x)$  nach  $x$  ist  $dH/dx$ , folglich wird aus  $H(x) = x^5$  nach der Ableitung  $5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4$ . Die zweite Ableitung von  $H(x)$  ist  $4 \cdot 5 \cdot x^{4-1} = 20 \cdot x^3$ . Jeder abgeleitete Term bildet einen Summanden, der erste Term wird mit  $\Delta x = -1$  gewichtet, der zweite Term mit  $\Delta x^2 = (-1)^2$  und der dritte Term mit  $\Delta x^3 = (-1)^3$ . Allgemein wird der Term der  $n$ -ten Ableitung mit  $\Delta x^n$  gewichtet.

Funktion  $H(x) = x^5$

exakte Berechnung für  $x = 11: H(11) = 11^5 = 161.051$

Taylor - Approximation für  $x = 10 (\Delta x = -1)$

$$\Delta H = \frac{dH}{dx} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2H}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3H}{dx^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{d^4H}{dx^4} \Delta x^4$$

$$= 5 \cdot x^4 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot x^3 \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{6} \cdot 60 \cdot x^2 \cdot \Delta x^3 + \frac{1}{24} \cdot 120 \cdot x^1 \cdot \Delta x^4$$

$$= 5 \cdot 11^4 \cdot (-1) + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 11^3 \cdot (-1)^2}_{\text{1. Summand}} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot 60 \cdot 11^2 \cdot (-1)^3}_{\text{2. Summand}} + \underbrace{\frac{1}{24} \cdot 120 \cdot 11 \cdot (-1)^4}_{\text{3. Summand}}$$

$$= -73.205 \quad = 13.310 \quad = -1.210 \quad = 55$$

**Abbildung VIII.13:** Beispiel für eine Taylor-Approximation

Mit Hilfe der Taylor-Approximation kann näherungsweise der Wert für  $H(10)$  berechnet werden, wenn  $H(11)$  bekannt ist. Zu diesem Zweck wird schrittweise die erste, zweite, dritte bis  $n$ -te Ableitung von  $H(x)$  gebildet und zu einer Summe verknüpft. In Abbildung VIII.13 ist die Taylor-Approximation von  $H(x)$  zunächst allgemein und darunter für das verwendete Beispiel mit  $H(x) = x^5$  gezeigt. Die erste Ableitung von  $H(x)$  nach  $x$  ist  $dH/dx$ , folglich wird aus  $H(x) = x^5$  nach der Ableitung  $5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4$ . Die zweite Ableitung von  $H(x)$  ist  $4 \cdot 5 \cdot x^{4-1} =$

$20 \cdot x^3$ . Jeder abgeleitete Term bildet einen Summanden, der erste Term wird mit  $\Delta x = -1$  gewichtet, der zweite Term mit  $\Delta x^2 = (-1)^2$  und der dritte Term mit  $\Delta x^3 = (-1)^3$ . Allgemein wird der Term der n-ten Ableitung mit  $\Delta x^n$  gewichtet.

Die Summe der Ableitungen des ersten bis n-ten Grades approximiert die Veränderung  $\Delta H$  für eine Änderung von  $x$  um  $\Delta x$ . Daher werden die Summanden aus der Taylor-Approximation zu dem Wert von  $H_{(11)} = 161.051$  addiert, um  $H_{(11+\Delta x)}$  zu erhalten. Wie viele Terme zu berücksichtigen sind, hängt von der gewünschten Genauigkeit der Näherung ab. Wird nur der erste Term berücksichtigt, ergibt die Taylor-Approximation einen Schätzwert von 87.846 ( $= 161.051 + (-73.205)$ ). Die Differenz zu dem exakten Wert von 100.000 beträgt 12.154. Die Berücksichtigung der ersten beiden Summanden führt zu einem besseren Schätzwert von 101.156 ( $= 161.051 + (-73.205) + 13.310$ ). Wenn schließlich die ersten vier Summanden einbezogen werden, liefert die Taylor-Approximation einen Schätzwert von 100.001, der nur noch marginal von dem exakten Wert 100.000 abweicht (vgl. Abbildung VIII.14).

	Taylor-Terme	kumuliert
<b>H(11)</b>	161.051	
<b>1. Ableitung</b>	-73.205	87.846
<b>2. Ableitung</b>	13.310	101.156
<b>3. Ableitung</b>	-1.210	99.946
<b>4. Ableitung</b>	55	100.001

Abbildung VIII.14: Taylor-Approximation

Die Delta-Normal-Methode berücksichtigt nur das Delta, welches der ersten Ableitung der Optionspreisformel von Black/Scholes entspricht. Bei der *Delta-Gamma-Methode* wird auch die *zweite Ableitung* berücksichtigt, so dass Wertschwankungen von Optionen besser abgebildet werden können. Aus den in Abbildung VIII.11 gezeigten Abhängigkeiten folgt für das Gamma der Aktienoption ein Wert von -0,0336.<sup>334</sup> Das Gamma entspricht der zweiten Ableitung der Optionspreisformel von Black/Scholes und wird in Form einer Taylor-Approximation zu der ersten Ableitung addiert, dem Delta.

Die allgemeine Darstellung der Delta-Gamma-Methode in Form einer Taylor-Approximation zeigt Gleichung VIII.3. Für das Beispiel ergibt sich ein Value at Risk der Aktienoption von -0,1116 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent. Die Differenz zum Value at Risk mit der Delta-Normal-Methode beträgt 0,00032 und ist identisch mit dem Wert aus der zweiten Ableitung, die das Gamma enthält.

---

<sup>334</sup> Genaue Berechnung vgl. mathematische Grundlagen im Kapitel XII.

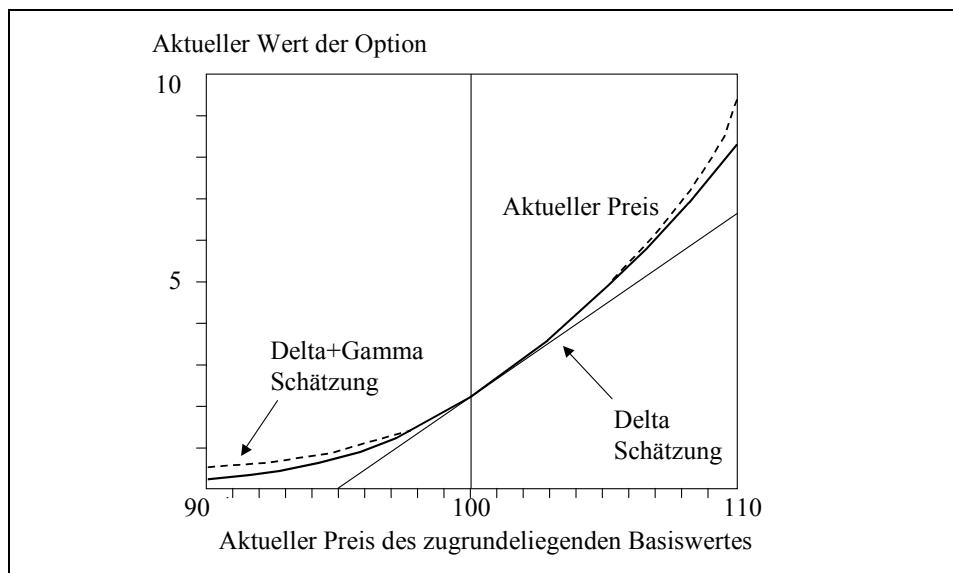
**Gleichung VIII.3:**

$$\text{VaR}_{\text{Call}} = \text{Optionspreis} \cdot |\Delta| \cdot z\text{-Wert} \cdot \text{Volatilität} - \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot (z\text{-Wert} \cdot \text{Volatilität} \cdot \text{Optionspreis})^2$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{\text{Call}} &= 7,80 \text{ EUR} \cdot 0,8113 \cdot (-1,6449) \cdot 0,01075 + \frac{1}{2} \cdot 0,0336 \\ &\quad \cdot (-1,6449 \cdot 0,01075 \cdot 7,80)^2\end{aligned}$$

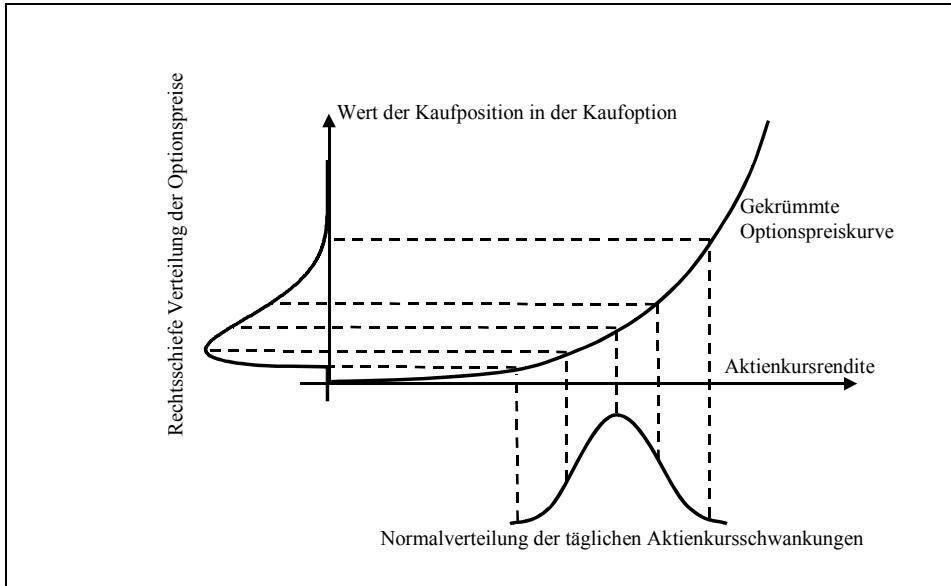
$$\text{VaR}_{\text{Call}} = -0,1119 + 0,00032 = -0,1116$$



*Abbildung VIII.15: Delta-Gamma-Approximation für eine Kaufoption*

Der Value at Risk mit Hilfe der Delta-Gamma-Methode fällt geringer aus, da durch das Gamma der gekrümmte Verlauf der Optionspreisformel besser berücksichtigt wird. Wenn der Aktienkurs sinkt, fällt der Optionspreis langsamer, als von der Delta-Normal-Methode angenommen wird (vgl. Abbildung VIII.15). Der Käufer einer Kaufoption, im Englischen wird die Position kurz als long Call bezeichnet, profitiert von einem hohen Gamma (long Gamma). Je größer das Gamma, desto stärker ist die Kurve gekrümmt und umso langsamer fällt der Optionswert bei sinkenden Aktienkursen. Ebenso positiv ist der Fall steigender Kurse, denn hier steigt der Optionswert schneller als dies bei einem linearen Verlauf angenommen wird.<sup>335</sup>

<sup>335</sup> Vgl. BUTLER, C.: Mastering Value at Risk – A step by step guide to understanding and applying VaR, Wiltshire GB 1999, S. 110 f. Der gleiche Effekt gilt bei long Put Positionen und Anleihen mit einer hohen Konvexität.



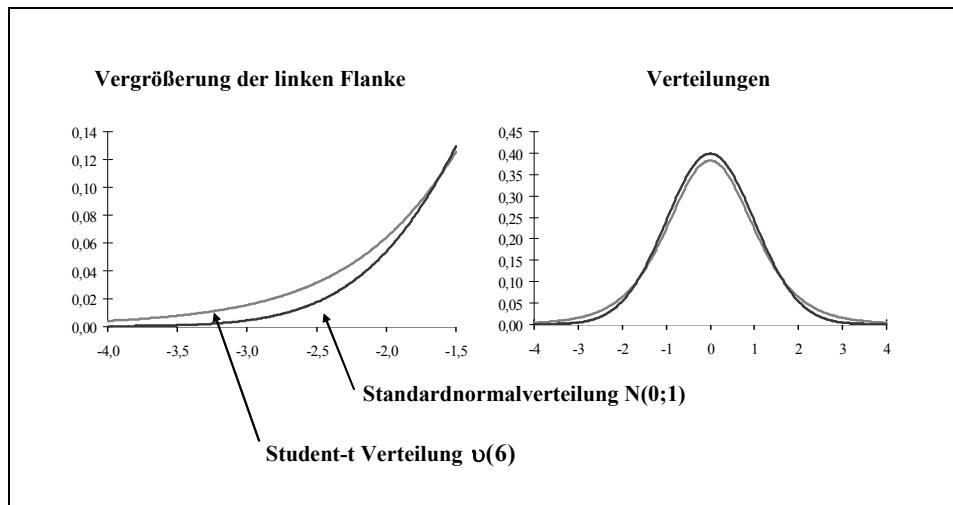
**Abbildung VIII.16:** Verteilung für den Optionspreis einer Kaufoption

Im Umkehrschluss bedeutet ein hohes Gamma für den Stillhalter (Verkäufer, engl. short Call) der Option sowohl bei sinkenden als auch steigenden Aktienkursen ein höheres Risiko, als von der Delta-Normal-Methode angenommen wird. Der Delta-Gamma-Methode hingegen gelingt es besser, den gekrümmten Verlauf der Optionspreiskurve nachzubilden. Jedoch entsteht durch die Krümmung ein neues Problem. Je größer das Gamma ist, umso stärker krümmt sich die Optionspreiskurve und umso schiefer wird die Verteilung der Optionspreise. Für den Käufer einer Kaufoption ist das Gamma positiv und es ergibt sich eine rechtsschiefe Verteilung der Optionspreise (vgl. Abbildung VIII.16).<sup>336</sup>

Eine rechtsschiefe Verteilung ist gekennzeichnet durch eine schmale Flanke am äußeren linken Ende. Für die Value-at-Risk-Berechnung ist das linke Ende entscheidend. Da auch von der Delta-Gamma-Methode eine Normalverteilung angenommen wird, kommt es ohne Berücksichtigung der Schiefe zu einer *Überschätzung des Risikos*. Eine Korrektur unter Einbezug der gemessenen Schiefe ist mit Hilfe der Cornish-Fisher-Erweiterung möglich, die den z-Wert um die Schiefe der Verteilung bereinigt.<sup>337</sup>

<sup>336</sup> Der Verkäufer einer Kaufoption hat die Gegenposition, folglich ein negatives Gamma und eine daraus resultierende linksschiefe Verteilung für den Optionswert. Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 500 f.

<sup>337</sup> Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 502 f.; RAUBREDOW, H.: Überwachung von Marktpreisrisiken durch Value at Risk, in: WiSt., 6/2001, S. 317.



**Abbildung VIII.17:** Vergleich Student-t-Verteilung mit Standardnormalverteilung

Abschließend werden beide Varianten des Varianz-Kovarianz-Modells kritisch gewürdigt. Die Delta-Normal-Methode hat gegenüber allen anderen Methoden zur Risikomessung den Vorteil einer besonders schnellen und einfachen Risikoschätzung. Davon abgesehen benötigt das Modell aber eine Reihe von Annahmen, die in der Realität nicht immer erfüllt sind.<sup>338</sup> Am häufigsten wird die Annahme normalverteilter Veränderungen der Risikofaktoren kritisiert, die nach Auffassung von einigen Autoren wie beispielsweise Wegner/Sievi/Schumacher für die Praxis nicht haltbar sei.<sup>339</sup> Deshalb haben in der Vergangenheit zahlreiche Autoren Ansätze zur Risikomessung mit parametrischen Modellen auf Basis alternativer Verteilungen, etwa der Student-t-Verteilung, präsentiert.<sup>340</sup>

Die **Student-t-Verteilung** wurde im Jahr 1908 von W. S. Gossett entdeckt. Zu diesem Zeitpunkt war Gossett bei der Guinness Brauerei beschäftigt, die ihren Angestellten keine Veröffentlichungen zugestand. Daher veröffentlichte Gossett seine Erkenntnisse unter dem Pseudonym „Student“. Die Student-t-Verteilung ist, wie die Normalverteilung auch, eine Glockenkurve, die den Bereich von minus bis plus Unendlich abdeckt. Die Parametrisierung der Verteilung erfolgt über die Anzahl der Freiheitsgrade  $v$ .

Die Student-t-Verteilung nähert sich mit zunehmendem Freiheitsgrad der Standardnormalverteilung  $N(0;1)$  an. Für unendlich viele Freiheitsgrade ist die Student-t-Verteilung mit der

338 Vgl. FRÖMMEL, M.; MENKHOFF, L.; TOLKSDORF, N.: Wechselkursvolatilität und institutsspezifische Value at Risk-Ansätze, in: Die Sparkasse, 11/1999, 116. Jahrgang, S. 508 ff.

339 Vgl. WEGNER, O.; SIEVI, C.; SCHUMACHER, M.: Szenarien der wertorientierten Steuerung des Zinsänderungsrisikos, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 03/2001, S. 140.

340 Für eine Übersicht vgl. MINA, J.; YI XIAO, J.: Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard, RiskMetrics Group, New York 2001, veröffentlicht auf: [www.riskmetrics.com/](http://www.riskmetrics.com/), 97 f.; Monographie: GROTTKE, M.: Die t-Verteilung und ihre Verallgemeinerungen als Modell für Finanzmarktdaten, Lohmar 2002.

Standardnormalverteilung identisch. In Abbildung VIII.17 wird eine Student-t-Verteilung mit sechs Freiheitsgraden der Standardnormalverteilung gegenübergestellt. Im Gegensatz zu der Standardnormalverteilung hat die Student-t-Verteilung dickere Enden und kann somit besser die in der Realität häufig beobachteten „fat tails“ abbilden. Von Koedjik, Huisman und Pownall wird vorgeschlagen, die Anzahl der Freiheitsgrade der Student-t-Verteilung anhand der „(fat) tails“ auszurichten.<sup>341</sup>

Eine umfassende Arbeit zur Verwendung der Student-t-Verteilung bei Existenz von fat tails bieten Glassermann, Heidelberger und Shahabuddin.<sup>342</sup> Die Autoren verwenden zunächst die Student-t-Verteilung zusammen mit einer Taylor-Approximation, wechseln dann jedoch zu einer Monte-Carlo-Simulation der Student-t-Verteilung. Die Ursache dafür ist, dass auch die Taylor-Approximation, wie sie in der Delta-Gamma-Methode Verwendung findet, nicht für alle Berechnungen eine ausreichende Genauigkeit bei der Value-at-Risk-Berechnung sicherstellen kann.

Neben den aufgewiesenen Vorteilen hat die Student-t-Verteilung auch *Nachteile*. Die Verteilung ist zwar besonders gut geeignet, um die fat tails abzubilden und kann entsprechend parametrisiert werden, dieser Vorteil wird jedoch zum Nachteil, wenn nicht nur die Risiken betrachtet werden sollen, sondern die gesamte Renditeverteilung. Denn fat tails gehen häufig einher mit hohen Wahrscheinlichkeiten für sehr geringe Renditen, was zusammen die Lepto-kurtosis ausmacht. Bereits die Normalverteilung ist in der Mitte zu flach, um bei der Lepto-kurtosis die hohen Wahrscheinlichkeiten für Renditen nahe Null abilden zu können. Die Student-t-Verteilung ist noch flacher und damit vorrangig für die Berechnung des Value at Risk, nicht aber für die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Renditen. Da Zeitreihen häufig nur begrenzt stationär sind, wird der Anwender in regelmäßigen Abständen mit der Parametrisierung der Student-t-Verteilung konfrontiert. Der daraus resultierende Nachteil besteht in dem hohen Aufwand zur Ermittlung des Verteilungsparameters.<sup>343</sup>

Für die Abbildung einer *einzelnen Kategorie von Risikofaktoren*, wie etwa Zinssätze für die Bewertung von Anleihen, mögen bessere Verteilungen als die Normalverteilung existieren. Die Herausforderung besteht jedoch darin, ein komplexes Portfolio mit einer Vielzahl unterschiedlicher Risikofaktoren, wie beispielsweise Zinsen, Aktien, Wechselkurse und Rohstoffpreise, adäquat und zeitnah abzubilden. Die Abweichung von der Normalverteilung zur Student-t-Verteilung ist dann eine gute Alternative, wenn das Unternehmen nur einem oder sehr wenigen Risikofaktoren ausgesetzt ist, alle Verteilungen mit der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden parametrisiert werden können, und der Schwerpunkt der Risikomessung insbesondere auf der Berücksichtigung von fat tails liegt.

---

<sup>341</sup> Vgl. KOEDJIK, K.; HUISMAN, R.; POWNHALL, R.: VaR-x: Fat tails in Financial Risk Management, in: Journal of Risk 1, S. 47 ff.

<sup>342</sup> Vgl. GLASSERMANN, P.; HEIDELBERGER, P.; SHAHABUDDIN, P.: Portfolio Value at Risk with heavy-tailed risk factors, Working Paper Series in Money, Economics And Finance, Columbia Business School, Juni 2000, S. 13.

<sup>343</sup> Vgl. FRÖMMEL, M.; MENKHOFF, L.; TOLKSDORF, N.: Wechselkursvolatilität und institutsspezifische Value at Risk-Ansätze, in: Die Sparkasse, 11/1999, 116. Jahrgang, S. 509.

Die Delta-Normal-Methode führt, unabhängig davon, welche Verteilung ihr zu Grunde gelegt wird, zu falschen Risikoprognosen, wenn in dem betrachteten Portfolio Optionen enthalten sind.<sup>344</sup> Das Ausmaß des Fehlers wächst mit dem Portfolioanteil asymmetrischer Produkte. Daher wurde in dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels die *Delta-Gamma-Methode* zur Lösung des Problems vorgeschlagen. Die Anwendung der Delta-Gamma-Methode liefert für Portfolios mit optionalen Produkten exaktere Value-at-Risk-Schätzungen als die Delta-Normal-Methode. Dennoch kommt es auch bei der Delta-Gamma-Methode zu *fehlerhaften Risikoeinschätzungen*, wenn die Restlaufzeit der Optionen gegen Null strebt und/oder die Optionen im Geld sind.

Die Autoren Knöchlein und Liermann haben die Prognosegüte der Delta-Normal-Methode und der Delta-Gamma-Approximation für Aktienoptionen mit einer Restlaufzeit von 91 Tagen und drei Tagen untersucht.<sup>345</sup> Dabei wurden die Value-at-Risk-Schätzungen aus den beiden Methoden mit Referenzwerten aus einer Monte-Carlo-Simulation verglichen. Während die Delta-Normal-Methode und die Delta-Gamma-Approximation nur eine Näherungslösung für die Veränderung des Optionspreises bei Änderung von Preisparametern liefern, wird bei der Monte-Carlo-Simulation die Option mit jedem simulierten Satz von Preisparametern neu bewertet (Vollbewertung).

Bei Restlaufzeiten von 91 Tagen entstehen aus beiden Approximationen bereits Abweichungen, die bei drei Tagen Restlaufzeit deutlich zunehmen. Für Optionen, die am Geld sind und/oder eine sehr kurze Restlaufzeit haben, wird eine Vollbewertung als ebenso notwendig angesehen wie bei exotischen Optionen oder sehr großen Risikofaktoränderungen. Weder die Delta-Normal-Methode noch die Delta-Gamma-Approximation liefern in den genannten Fällen zuverlässige Value-at-Risk-Schätzungen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass ein Portfolio, welches optionale Produkte beinhaltet, beiden Varianz-Kovarianz-Modellen Probleme bereitet. Die Delta-Normal-Methode ist einfach zu implementieren, kann jedoch in Extremfällen einen Value at Risk von Null ausweisen, obwohl tatsächlich Risiken in Millionenhöhe vorhanden sind.<sup>346</sup> Die Delta-Gamma-Methode ist exakter, aber mathematisch auch anspruchsvoller. Trotzdem gelingt auch mit dieser Methode keine zuverlässige Bestimmung des Value at Risk, sobald ein erhöhter Bestand an Optionen in das Portfolio aufgenommen wird. Dabei kann keine generelle Aussage über die Größe des Fehlers bei der VaR-Schätzung in Abhängigkeit des Volumens an Optionen gemacht werden. Die alleinige Präsenz von Optionen im Portfolio muss allerdings nicht zu einem falschen Value at Risk führen. Der Fehler hängt vielmehr von der Restlaufzeit und

---

<sup>344</sup> Vgl. BUTLER, C.: Mastering Value at Risk – A step by step guide to understanding and applying VaR, Wiltshire GB 1999, S. 108. JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 209.

<sup>345</sup> Vgl. KNÖCHELIN, G.; LIERMANN, V.: Value at Risk und Barwert-Approximation, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, Nr. 8/2000, 49. Jahrgang, S. 388 ff.

<sup>346</sup> Als Beispiel kann die deltaneutrale Kombination von Calls und Puts betrachtet werden. Das positive Delta vom Call wird durch das negative Delta vom Put aufgehoben. Die Delta-Normal-Methode würde ein Risiko von Null ausweisen. Die englische Barings Bank wurde 1995 mit dieser „risikolosen“ Kombination von Nick Leeson ruiniert. Vgl. JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 215 ff.

der Volatilität der Optionen und von der betrachteten Haltedauer für den Value at Risk ab.<sup>347</sup> Von Jorion wird explizit darauf hingewiesen, dass auch das Wurzelgesetz nicht anwendbar ist, wenn im Portfolio Optionen vorhanden sind.

Für die Praxis kann das Varianz-Kovarianz-Modell als erste schnelle Lösung dienen, um beispielsweise einen groben Eindruck von den aktuell bestehenden Risiken zu erhalten. So könnte die tägliche Risikoüberwachung mit einem Varianz-Kovarianz-Modell erfolgen und in gewissen Abständen wären die Risikoschätzungen mit Hilfe von exakteren, aber komplexen und rechenaufwendigen Modellen wie beispielsweise der Monte-Carlo-Simulation und einer Vollbewertung zu prüfen.

### 3. Die Historische Simulation

Die Historische Simulation verzichtet auf eine analytische Untersuchung der Risikofaktoren und arbeitet stattdessen mit Daten der Vergangenheit.<sup>348</sup> Entsprechend hoch ist der Aufwand für die Pflege des Datenhaushalts. Während für die Anwendung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes und der Monte-Carlo-Simulation die Schätzung der Volatilitäten und Korrelationen genügt, müssen für die Historische Simulation von allen Risikofaktoren alle Tageswerte der betrachteten Vergangenheit archiviert werden. Die Schwierigkeit besteht in der Auswahl eines optimalen Zeitfensters. Wenn die betrachteten Werte weit in die Vergangenheit zurückgehen, stellt sich die Frage, inwiefern sehr alte Beobachtungen für die aktuelle Risikomessung noch relevant sind. Wird die Historie jedoch zu kurz gewählt, stellt sich die Frage, ob die Anzahl der betrachteten Werte repräsentativ ist. Gleichzeitig vergrößert sich der Schätzfehler bei abnehmendem Stichprobenumfang.

Im Folgenden wird die Historische Simulation an einem Beispiel erläutert. Für den Wechselkurs EUR/USD soll am 30.06.2008 auf Basis von zunächst 250 historischen Wechselkursdifferenzen der Value at Risk mit einer Haltedauer von einem Tag und einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent berechnet werden. Das einfachste Verfahren zur Durchführung einer Historischen Simulation ist die *Differenzenmethode*.<sup>349</sup> Die Anwendung der Differenzenmethode wird für die Inntal AG mit einer Fremdwährungsposition von 4.194.689 USD (= Rohstoffvorrat von 478 Tonnen Kupfer) gezeigt, die per 30.06.2008 einen Gegenwert von 2.654.866 EUR hat (= 4.194.689 USD : 1,58 EUR/USD).

---

<sup>347</sup> Vgl. JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 208-218.

<sup>348</sup> Vgl. BUTLER, C.: Mastering Value at Risk – A step by step guide to understanding and applying VaR, Wiltshire GB 1999, S. 50 f.; Oehler, A.; Unser, M.: Finanzwirtschaftliches Risikomanagement, Berlin 2001, S. 161.

<sup>349</sup> Vgl. HUSCHENS, S.: Value at Risk-Berechnung durch historische Simulation, in: Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren Nr. 30/00, Technische Universität Dresden, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Dresden 2000, S. 6 f., 12 ff.

In einem ersten Schritt werden für die vom 30.06.2008 aus betrachtet letzten 250 Handelstage die täglichen Wechselkursdifferenzen berechnet (jeweils alter Wechselkurs minus neuer Wechselkurs). Ausgehend vom aktuellen Wechselkurs 1,58 EUR/USD per 30.06.2008 werden die 250 historischen Differenzen addiert und ergeben so 250 Szenarien für die Wechselkursänderung binnen eines Tages. Mit den 250 Wechselkursszenarien wird im zweiten Schritt die Fremdwährungsposition von 4.194.689 USD bewertet. Daraus entstehen 250 mögliche Fremdwährungsvermögen in EUR konvertiert. Diese können der Größe nach geordnet und als Häufigkeitsverteilung dargestellt werden (vgl. Abbildung VIII.19). Aus der Häufigkeitsverteilung ist ablesbar, welcher Verlust im Fremdwährungsvermögen in EUR mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit binnen eines Tages aufgrund von Wechselkursschwankungen nicht überschritten wird. In dem betrachteten Beispiel beträgt dieser Value at Risk circa 16.200 EUR (= Ausgangswert heute 2.654.866 minus 5 %-schlechtester Wert morgen 2.638.633).

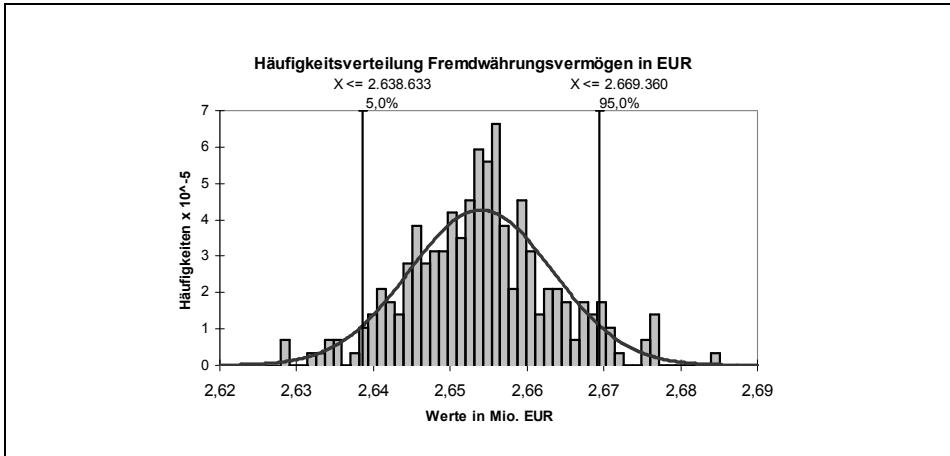
Historie	Datum	EUR/USD	Differenz	Simulation
-250	16.07.2007	1,377		
-249	17.07.2007	1,378	0,001	1,581
-248	18.07.2007	1,380	0,001	1,581
-247	19.07.2007	1,380	0,000	1,580
-246	20.07.2007	1,383	0,003	1,583
-245	23.07.2007	1,381	-0,002	1,578
-244	24.07.2007	1,383	0,001	1,581
-243	25.07.2007	1,373	-0,007	1,573
-242	26.07.2007	1,374	0,001	1,581
-241	27.07.2007	1,363	-0,008	1,572
-240	30.07.2007	1,369	0,004	1,584
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
-8	18.06.2008	1,553	0,002	1,582
-7	19.06.2008	1,551	-0,002	1,578
-6	20.06.2008	1,563	0,008	1,588
-5	23.06.2008	1,552	-0,007	1,573
-4	24.06.2008	1,557	0,003	1,583
-3	25.06.2008	1,567	0,007	1,587
-2	26.06.2008	1,575	0,005	1,585
-1	27.06.2008	1,580	0,003	1,583
0	30.06.2008	1,576	-0,003	1,577

**Simulation:**  
Wechselkurs  
vom 30.06.08  
+ historische  
Differenz.

**Beispiel:**  
 $1,58 + 0,004$   
 $= 1,584$

Abbildung VIII.18: Die Differenzenmethode

Für einen längeren Planungshorizont werden statt der täglichen Differenzen die wöchentlichen, monatlichen oder quartalsweisen Differenzen berechnet und in der Simulation addiert. Beispielsweise ergibt sich die erste 10-Tages-Differenz aus der Subtraktion des Wechselkurses vom 16.07.2007 ( $t_{-250} = 1,377$  EUR/USD) von dem Wert am 30.07.2007 ( $t_{-240} = 1,369$  EUR/USD) und beträgt -0,008 EUR/USD. In der Risikobetrachtung wird dieser Wert zum aktuellen Wechselkurs von 1,58 EUR/USD addiert und simuliert das erste Szenario für den Wechselkurs in zehn Tagen: 1,588 EUR/USD. Das zweite Szenario folgt analog aus der 10-Tages-Differenz zwischen dem 17.07.2007 und dem 31.07.2007.



**Abbildung VIII.19:** Geordnete Ergebnisse für die Differenzenmethode

Die wesentliche *Annahme der Differenzenmethode* besteht darin, dass die Höhe der Differenzen unabhängig vom Niveau des Risikofaktors ist, respektive das Niveau im Zeitablauf relativ konstant bleibt. Diese Annahme ist bei einem Wechselkurs annähernd erfüllt, da dieser keine Sprünge von 1,00 EUR/USD auf 8,00 EUR/USD und zurück verfolgt. Anders sieht es beispielsweise beim Kupferpreis aus, der im September 2003 bei einem Preisniveau um 1.700 bis 1.800 USD notierte und im Mai 2006 auf knapp 8.800 USD kletterte. Die auf einem Preisniveau um 1.800 USD gemessenen Schwankungen sind nicht übertragbar auf das Niveau von 8.800 USD und umgekehrt. In solchen Fällen kann es zu falschen Risikoeinschätzungen kommen.

In der Literatur wird in Einzelmeinungen die Verwendung relativer oder logarithmierter Veränderungen als Alternative gegenüber der Betrachtung von absoluten Differenzen abgelehnt.<sup>350</sup> Das nachfolgende Beispiel zeigt aber, dass der herrschenden Meinung folgend gerade die relativen und logarithmierten Veränderungen (Renditen) von Risikofaktoren für eine korrekte Risikoeinschätzung zielführend sind. Die *Quotientenmethode* misst die *logarithmierten Veränderungen* und erfüllt sowohl das Kriterium der Unabhängigkeit von dem absoluten Niveau als auch das Kriterium der Stationarität.<sup>351</sup> Für das Standardbeispiel einer Fremdwährungsposition werden die *logarithmierten Wechselkursänderungen* der vergangenen 250 Tage berechnet. Die erste Wechselkursänderung ergibt sich aus dem natürlichen Logarithmus des Quotienten  $\ln(\text{Wechselkurs}_{t-249} : \text{Wechselkurs}_{t-250})$  und beträgt für das Beispiel 0,00065 ( $= \ln(1,378 / 1,377)$ ). Die nächste logarithmierte Wechselkursänderung folgt analog aus  $\ln(\text{Wechselkurs}_{t-248}/\text{Wechselkurs}_{t-249})$  und beträgt 0,00145 ( $= \ln(1,380 / 1,378)$ ). Auf diese Weise entstehen 250 logarithmierte tägliche Wechselkursänderungen. Im zweiten

<sup>350</sup> Vgl. WEGNER, O.; SIEVI, C.; SCHUMACHER, M.: Szenarien der wertorientierten Steuerung des Zinsänderungsrisikos, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 03/2001, S. 139.

<sup>351</sup> Zu den Kriterien vgl. Kapitel XII.

Schritt werden die 250 beobachteten Veränderungen (Renditen) mit dem Wechselkurs vom 30.06.2008 multipliziert ( $=1,58 \text{ EUR/USD} \cdot e^{\text{logarithmierte Rendite}}$ ) und ergeben 250 mögliche Wechselkursänderungen für den nächsten Tag.

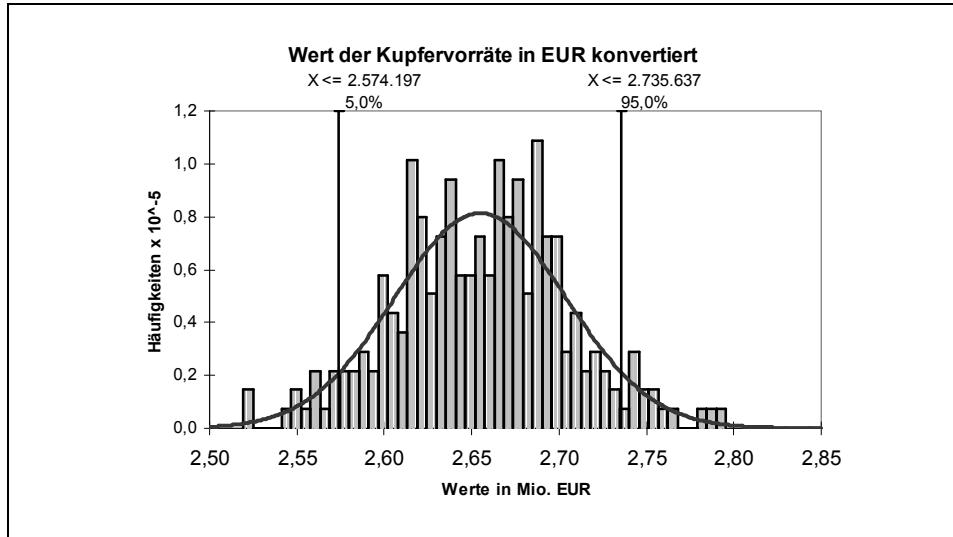
Historie	log. Rendite EUR/USD	log. Rendite Kupfer	Simulation EUR/USD	Simulation Kupfer	Vermögen in EUR
-249	0,00065	-0,01613	1,58	8,635	2.610.676
-248	0,00145	0,00509	1,58	8,820	2.664.545
-247	-0,00036	0,01524	1,58	8,910	2.696.610
-246	0,00261	0,01483	1,58	8,907	2.687.507
-245	-0,00188	0,01096	1,58	8,872	2.689.181
-244	0,00145	-0,00611	1,58	8,722	2.634.882
-243	-0,00740	-0,02293	1,57	8,577	2.613.958
-242	0,00087	-0,00869	1,58	8,700	2.629.598
-241	-0,00760	-0,00329	1,57	8,747	2.666.320
-240	0,00439	0,00063	1,59	8,781	2.644.911
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
-9	0,00252	-0,00900	1,58	8,697	2.624.450
-8	0,00174	0,01396	1,58	8,899	2.687.506
-7	-0,00168	0,01073	1,58	8,870	2.688.008
-6	0,00797	0,02409	1,59	8,990	2.698.036
-5	-0,00719	-0,00578	1,57	8,725	2.658.619
-4	0,00309	-0,00575	1,58	8,725	2.631.495
-3	0,00653	0,00593	1,59	8,828	2.653.269
-2	0,00547	0,00105	1,59	8,785	2.643.156
-1	0,00260	0,01497	1,58	8,908	2.687.922
0	-0,00254	0,01094	1,58	8,872	2.690.891

**Abbildung VIII.20:** Datenaufbereitung für die Quotientenmethode

Die logarithmierte Veränderung (Rendite) wird zur Basis der Eulerschen Zahl  $e \approx 2,718282$  potenziert, da zuvor die Veränderungen aus dem Logarithmus des Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Wechselkurse errechnet wurden. Die e-Funktion bildet die Umkehrfunktion zum natürlichen Logarithmieren. Durch die Betrachtung der Veränderungen in Relation zum jeweiligen Preisniveau können einfacher mehrere Risikofaktoren in ihrer wechselseitigen Wirkung betrachtet werden, beispielsweise der Wechselkurs EUR/USD und der Kupferpreis. Auf diese Weise werden wechselseitige Abhängigkeiten und Diversifikationseffekte implizit in der Risikosimulation berücksichtigt (vgl. Abbildung VIII.20). Einige Autoren verzichten auf das Logarithmieren und berechnen die täglichen Veränderungen aus dem Quotienten  $(S_{t-249} - S_{t-250}) / S_{t-250}$ .<sup>352</sup> Aus Vereinfachungsgründen ist der Verzicht auf die logarithmierten Veränderungen zulässig, insbesondere dann, wenn die Wechselkursänderungen gering sind und die Wechselkurse selbst auf einem hohen Niveau liegen.<sup>353</sup>

<sup>352</sup> Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 523; HUSCHENS, S.: Value at Risk-Berechnung durch historische Simulation, in: Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren Nr. 30/00, Technische Universität Dresden, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Dresden 2000, S. 9.

<sup>353</sup> Vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, S. 129 ff.



**Abbildung VIII.21:** Geordnete Ergebnisse der Historischen Simulation für den Wechselkurs EUR/USD und den Kupferpreis (logarithmierten Renditen)

Auf die in Abbildung VIII.20 gezeigte Weise werden 250 mögliche Wechselkurse und Kupferpreise für den nächsten Tag berechnet. Die Wechselkursschwankungen und Kupferpreisänderungen werden paarweise so in die Zukunft simuliert, wie sie in der Historie beobachtet wurden. Dadurch wird implizit die historische Korrelation zwischen beiden Risikofaktoren berücksichtigt. Abbildung VIII.21 zeigt als Ergebnis der Simulation die Häufigkeitsverteilung für den Wert in EUR der 478 Tonnen Kupfervorräte. Für die im Beispiel gewählte Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent muss das 5 %-Quantil bestimmt werden. Mit 5 Prozent Wahrscheinlichkeit wird der Verlust höher als der Wert des 5 %-Quantils ausfallen. Umgekehrt wird mit 95 Prozent Wahrscheinlichkeit höchstens ein Verlust in Höhe des 5 %-Quantils eintreten. Bei 250 geordneten möglichen Realisationen des Vermögens liegt das 5 %-Quantil zwischen dem 12. Wert und 13. Wert. Wird der 13. Wert als Quantilswert verwendet, dann sind 12 Werte (= 4,80 %) kleiner. Das ist zu wenig, da bei einem 5 %-Quantil erwartet wird, dass 5 Prozent der Werte unter dem Quantilswert liegen. Dient der 14. Wert als Quantilswert, dann liegen 13 Werte (= 5,20 %) darunter. Das ist zu viel, denn die Value-at-Risk-Schätzung hat in diesem Fall nur eine Wahrscheinlichkeit von 94,78 Prozent (= 100 % – 5,22 %) statt 95 Prozent. Bei einer konservativen Entscheidung fällt die Wahl auf den 13. Wert als 5 %-Quantil. Alternativ könnte zwischen dem 12. und 13. Wert interpoliert werden. Die Differenz zwischen dem 12. und 13. Wert ist zu 0,50 Teilen vom 12. Wert zu subtrahieren. Es ergibt sich ein interpoliertes 5 %-Quantil.<sup>354</sup> Im Beispiel wird mit 95 Prozent (hier mangels Interpolation exakt 95,20 %) Wahrscheinlichkeit der Wert der Rohstoffvorräte am nächsten Tag nicht unter 2.574,197 EUR fallen. Im Vergleich zum Ausgangswert vom 30.06.2008 (2.654.866

<sup>354</sup> Die Quantilsfunktion von Excel nutzt Interpolationen.

EUR) wäre das ein Verlust von circa 80.700 EUR. Dieser Value at Risk ist nahe an dem Wert von 80.600 EUR, der in Abschnitt VIII.1 mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz ermittelt wurde, obwohl beide Risikomodelle grundsätzlich unterschiedlich konzipiert sind.<sup>355</sup>

In der Literatur wird häufig nur die Quotientenmethode als Historische Simulation vorgestellt, ohne die Existenz weiterer Methoden zu erwähnen.<sup>356</sup> Um die möglichen, oben diskutierten Fehler bei der Risikoabschätzung mit Differenzen zu vermeiden, ist die Quotientenmethode vorzuziehen. Darin dürfte auch die Ursache liegen, dass der Differenzenmethode in der Literatur nur wenig bis keine Bedeutung zukommt.

Für die Betrachtung mehrerer Risikofaktoren können innerhalb der Historischen Simulation grundsätzlich zwei Ansätze zur Berechnung des Portfoliorisikos unterschieden werden, der Faktoransatz und der Portfolioansatz.<sup>357</sup> Bei dem *Faktoransatz* wird zunächst für die einzelnen Risikofaktoren der Value at Risk isoliert berechnet und dann zu einem Value at Risk des Portfolios aufaddiert. Im Beispiel ergibt sich der Value at Risk des Portfolios aus der Summe der Value-at-Risk-Werte für das Wechselkursrisiko und das Rohstoffpreisrisiko, bei Bedarf unter Berücksichtigung einer explizit gemessenen Korrelation mit Hilfe der Gleichung VIII.1. Der Faktoransatz kann als ein gemischter Ansatz aus Differenzenmethode und Quotientenmethode eingesetzt werden. Die zweite Alternative zur Berücksichtigung mehrerer Risikofaktoren stellt der *Portfolioansatz* dar.<sup>358</sup> Implizit wird dabei unterstellt, dass die Veränderungen mehrerer Risikofaktoren in der Zukunft in der gleichen Kombination auftreten werden, wie es in der Vergangenheit beobachtet wurde. Die Berechnung in der Abbildung VIII.20 wurde nach dem Portfolioansatz durchgeführt.<sup>359</sup>

Abschließend kann für die Historische Simulation als wesentlicher Vorteil festgehalten werden, dass keine Verteilungsannahme benötigt wird. Der Ansatz kommt daher mit weniger Modellannahmen aus.<sup>360</sup> Es wird keine explizite Korrelationsmatrix berechnet. Im Portfolio-

---

<sup>355</sup> Beide Modelle arbeiten aber mit einer identischen Historie. Im Varianz-Kovarianz-Ansatz wurden die Standardabweichungen und die Korrelation aus der gleichen Historie geschätzt, wie sie in der Historischen Simulation für die Ermittlung der logarithmierten Renditen dient.

<sup>356</sup> Häufig wird die Historische Simulation nur noch hinsichtlich der zu Grunde liegenden Daten von der Monte-Carlo-Simulation abgegrenzt. Vgl. DEUTSCH, H.-P.: Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement, 2. Auflage, Stuttgart 2001, S. 410; HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 505 f.; JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 193 ff.; OEHLER, A.; UNSER, M.: Finanzwirtschaftliches Risikomanagement, Berlin 2001, S. 161.

<sup>357</sup> Vgl. HUSCHENS, S.: Value at Risk-Berechnung durch historische Simulation, in: Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren Nr. 30/00, Technische Universität Dresden, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Dresden 2000, S. 6 ff.

<sup>358</sup> Häufig wird unter dem Begriff der historischen Simulation ausschließlich der Portfolioansatz gezeigt. Vgl. DEUTSCH, H.-P.: Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement, 2. Auflage, Stuttgart 2001, S. 410; HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 506; JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 193 ff.

<sup>359</sup> Für eine detaillierte Darstellung von Differenzen-/Quotientenmethode im Faktoransatz und Portfolioansatz vgl. HAGER, P.: Corporate Risk Management – Cash Flow at Risk und Value at Risk, Frankfurt/Main 2004, S. 133 ff.

<sup>360</sup> Vgl. DEUTSCH, H.-P.: Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement, 2. Auflage, Stuttgart 2001, S. 410.

ansatz werden in den Bewertungsdaten implizit die Korrelationen aus der Vergangenheit berücksichtigt. Durch Transformation der Bewertungsdaten aus der Vergangenheit werden Szenarien für die Risikofaktoren in der Zukunft generiert. Daraus ergeben sich zwei *Nachteile* der Historischen Simulation. Zum einen muss ein großer Datenhaushalt gepflegt werden und zum anderen lautet die *entscheidende Prämisse*: Was es in der Vergangenheit nicht gab, wird es auch in der Zukunft nicht geben, denn das Modell arbeitet mit historischen Beobachtungen und es lassen sich nur Dinge prognostizieren, die schon passiert sind. Zukunftsorientierte Marktdaten wie implizite Volatilitäten werden nicht berücksichtigt.

Bezüglich des Datenhaushalts können Probleme bei der Risikoberechnung entstehen, wenn beispielsweise in der Vergangenheit bestimmte Risikofaktoren (etwa Produkte, Währungen, Fonds etc.) noch nicht existiert haben, folglich auch keine Historie verfügbar ist. Umgekehrt ist die permanente Datenpflege aller potenziellen Risikofaktoren aufwendig. Für die Historische Simulation lässt sich ähnliche Kritik üben wie für die Volatilitäten auf Basis gleichgewichteter Beobachtungen aus einer langen Historie.<sup>361</sup> Alle historischen Veränderungen gehen durch ein rollierendes Zeitfenster gleichgewichtet in die Value-at-Risk-Berechnung ein. Dadurch können „Geisterkurven“ entstehen, wenn zum Beispiel extreme Marktpreisveränderungen aus der Vergangenheit zunächst zu einer Überschätzung des aktuellen Risikos führen und anschließend, bei Wegfall aus dem rollierenden Zeitfenster, den Value at Risk plötzlich stark absacken lassen.<sup>362</sup>

Die Berechnung eines Value at Risk für Haltedauern von mehr als einem Tag mit der Historischen Simulation führt zu einem Entscheidungsproblem. Zum einen kann der Value at Risk zunächst für die Haltedauer von einem Tag berechnet und anschließend mit dem Wurzelgesetz auf zehn Tage skaliert werden. Jedoch setzt das Wurzelgesetz ebenso wie die Normalverteilungsannahme bei dem Varianz-Kovarianz-Modell die stochastische Unabhängigkeit der Wertänderungen voraus. Wird aber das im Varianz-Kovarianz-Modell wegen der mangelnden Unabhängigkeit abgelehnt, darf auch das Wurzelgesetz nicht angewendet werden. Hier hört die „Parameterfreiheit“ der Historischen Simulation auf. Als Alternative zum Wurzelgesetz ist die Messung der historischen Veränderungen eines Risikofaktors über die gewünschte Haltedauer möglich. Wird beispielsweise für die Risikoprognose eine Haltedauer von zehn Tagen gewünscht, kann die Berechnung auf Basis der historischen Veränderungen innerhalb von je zehn Tagen erfolgen. Damit wäre eine Anwendung des Wurzelgesetzes zur Skalierung eines eintägigen Value at Risk auf den zehntägigen Wert überflüssig.

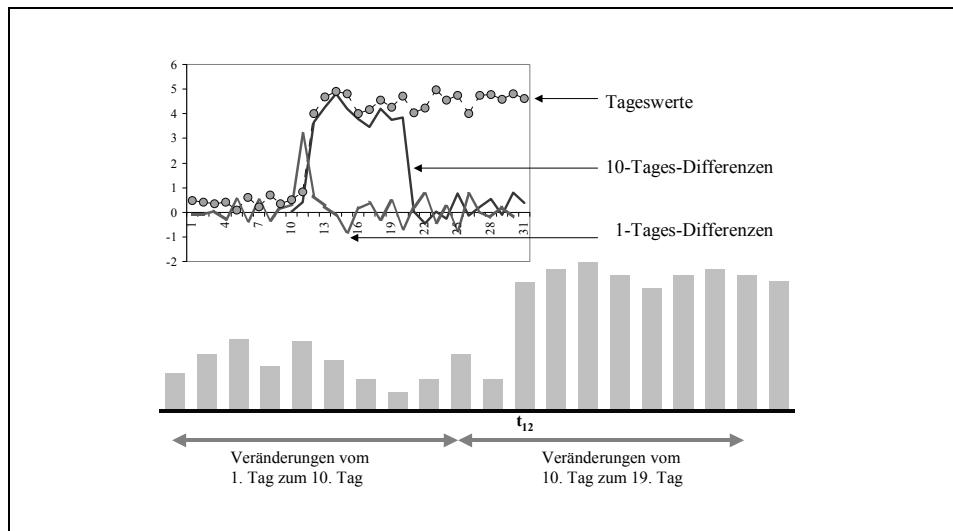
Allerdings entsteht nun ein neues Problem, denn die historischen zehntägigen Veränderungen können auf zwei Weisen berechnet werden. Zunächst wäre es denkbar, die Veränderung von  $t_0$  auf  $t_{10}$ , von  $t_{10}$  auf  $t_{20}$ , von  $t_{20}$  auf  $t_{30}$  usw. zu messen. Dann gehen aber die Informationen über die Wertänderungen zwischen den Stichtagen verloren. Insbesondere stellt sich die Frage, welcher Tag  $t_0$  sein soll, denn davon ausgehend wird festgelegt, welche nachfolgenden Tage in dem zehntägigen Intervall berücksichtigt werden. Wenn  $t_0$  beispielsweise ein Montag ist, wird stets die Veränderung von Montag auf Freitag der nachfolgenden Woche gemessen

---

<sup>361</sup> Vgl. Kapitel XII.

<sup>362</sup> Vgl. JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 224.

(zehn Handelstage). Dann stellt sich aber die Frage, wieso nicht beispielsweise von Mittwoch auf Dienstag der jeweils übernächsten Woche gemessen werden soll. Die Gefahr bei dieser Methode liegt darin, dass extreme Wertänderungen unbeobachtet bleiben, weil sie zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten liegen. Im unteren Teil von Abbildung VIII.22 ist beispielhaft die Entwicklung eines Risikofaktors gezeigt. Die Wertänderung von  $t_{11}$  auf  $t_{12}$  ist extrem, wird aber bei der bisher gezeigten Alternative nicht berücksichtigt.



**Abbildung VIII.22:** Falscher Steuerungsimpuls bei 10-Tages-Value-at-Risk

Um den großen Informationsverlust und das Problem der optimalen Auswahl von  $t_0$  zu vermeiden, wäre es sinnvoll, die historischen zehntägigen Messungen der Wertänderungen von  $t_0$  auf  $t_{10}$  ( $= t_{10} - t_0$ ), von  $t_1$  auf  $t_{11}$ , von  $t_2$  auf  $t_{12}$  usw., zu messen. Aber auch bei dieser Methode kann es zu Fehlern kommen. In Abbildung VIII.22 wird simuliert, dass ab dem Zeitpunkt  $t_{12}$  die Tageswerte auf einem höheren Niveau schwanken als in der Vergangenheit (etwa infolge eines Schocks wie am 11.09.2001). Die schraffierte graue Linie in dem Chart von Abbildung VIII.22 zeigt den Verlauf der täglichen Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Marktpreisen. Bei den täglichen Differenzen macht sich die Erhöhung des Niveaus einmalig durch einen Ausschlag nach oben bemerkbar. Danach verlaufen die Differenzen wieder auf einem niedrigen Niveau. Das ist berechtigt, denn die zu Grunde liegenden Tageswerte schwanken nach der Verschiebung auf das höhere Niveau ebenfalls wieder geringer. Die 10-Tages-Differenzen zeigen aber die einmalige Verschiebung gleich neunmal an. Denn ein und dieselbe Verschiebung wird in den Differenzen von  $t_{12} - t_2, t_{13} - t_3, t_{14} - t_4, \dots, t_{20} - t_{10}$  insgesamt neunmal gemessen.<sup>363</sup> Die Betrachtung von 30-Tages-Differenzen würde dem entsprechend eine einmalige Preisverschiebung 29-mal anzeigen.

<sup>363</sup> Das Beispiel lässt sich einfach in einer Tabellenkalkulation wie Excel nachvollziehen.

Bei der Frage nach der korrekten Berechnung eines Value at Risk für zehn Tage Haltedauer stößt die Historische Simulation an ihre Grenzen, denn die Messung von 10-Tages-Differenzen kann zu fehlerhaften Impulsen führen. Wenn aber der Value at Risk für einen Tag mit dem Wurzelgesetz auf zehn Tage skaliert wird, muss die Aussage, dass die einzige Annahme der Historischen Simulation in der Relevanz historischer Risikofaktoränderungen für die Zukunft besteht, in Frage gestellt werden.<sup>364</sup> Die Parameterfreiheit der Historischen Simulation beschränkt sich darauf, dass sie keine Aussage über die den Veränderungen eines Risikofaktors zu Grunde liegende Verteilung macht.<sup>365</sup>

Ohne die Annahme einer statistischen Verteilung für die Risikofaktoren entsteht das Problem der fat tails nicht, weil in den historischen Daten extreme Schwankungen bereits enthalten sind. Die Historische Simulation erfolgt auf der Basis von historischen gleichgewichteten Beobachtungen. Falsche Risikoprognosen werden insbesondere dann entstehen, wenn es auf den Märkten zu temporär hohen Volatilitäten kommt.<sup>366</sup> Das Konzept ist träge und kann sich daher nicht an schnell wechselnde Marktsituationen anpassen. Aus der gleichen Trägheit können Geisterkurven entstehen.<sup>367</sup>

Im Gegensatz zu den mächtigeren Simulationsverfahren wie beispielsweise der Monte-Carlo-Methode wird von der Historischen Simulation nur ein einziger Preispfad berücksichtigt, eben der historische Verlauf. Die begrenzte Menge an noch für die Zukunft relevanten historischen Daten ist ein weiteres Dilemma der Historischen Simulation.<sup>368</sup> Häufig werden nur die letzten ein bis vier Jahre berücksichtigt, was 250 bis 1.000 Beobachtungen entspricht. Bei zum Beispiel nur 250 Beobachtungen ist der Stichprobenumfang klein und der Schätzfehler groß. Um die gleiche Anzahl von Szenarien berücksichtigen zu können wie bei einer Monte-Carlo-Simulation mit 10.000 Zufallszahlen, würde die Historische Simulation die Daten der letzten 40 Jahre benötigen.<sup>369</sup> Wenn aber auf eine längere Historie zurückgegriffen wird, stellt sich die Frage, ob das, was in der Vergangenheit war, noch für die Zukunft relevant ist.

Insbesondere für die Bewertung von komplexen Portfolios mit Derivaten wird die nur geringe Menge der für die Zukunft repräsentativen historischen Daten zu einem Modellrisiko. Vor diesem Hintergrund werden Verfahren vorgeschlagen, wie aus einem begrenzten historischen Datensatz mehr Daten erzeugt werden können. In der Praxis sind Verfahren wie die „antithetic Variablen Technik“ beliebt.<sup>370</sup> Das Vorgehen besteht im Wesentlichen darin, die Vorzeichen der historischen Werte umzudrehen und dadurch die doppelte Anzahl von Daten zu

---

<sup>364</sup> Vgl. KNÖCHLEIN, G.; LIERMANN, V.: Value at Risk und Barwert-Approximation, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, Nr. 8/2000, 49. Jahrgang, S. 387.

<sup>365</sup> Vgl. RAU-BREDOW, H.: Überwachung von Marktpreisrisiken durch Value at Risk, in: WiSt., 6/2001, S. 318.

<sup>366</sup> Vgl. JORION, P.: Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, USA 1997, S. 223.

<sup>367</sup> Zum Effekt von „Geisterkurven“ vgl. Kapitel XII.

<sup>368</sup> Vgl. HULL, J. C.: Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Auflage, München 2001, S. 506.

<sup>369</sup> Dabei wird von 250 Handelstagen pro Jahr ausgegangen:  $250 \cdot 40 = 10.000$

<sup>370</sup> Vgl. SIEGL, T.; WEST, A.: Statistical Bootstrapping Methods in VaR calculation, Working Paper, veröffentlicht auf <http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453055830>, S. 8.

erhalten.<sup>371</sup> Trotzdem verfügt die Historische Simulation häufig nur über einen Bruchteil der Datenbasis einer Monte-Carlo-Simulation. Für die Bewertung von Derivaten werden mindestens 5.000 Simulationen verlangt.<sup>372</sup> Dafür müssten in einer Historischen Simulation die letzten zwanzig Jahre ausgewertet werden.<sup>373</sup>

Neben dem Problem einer ausreichenden Datenbasis ist die Historische Simulation streng genommen auch konzeptionell kein geeignetes Verfahren für die Bewertung von Derivaten.<sup>374</sup> Denn das Argument für die Historische Simulation besteht gerade darin, dass die Risikofaktoren keiner bestimmten Verteilung unterliegen und auch nicht durch einen Random Walk beschrieben werden können. Dann dürfen aber auch keine Optionsbewertungsmodelle für die Bewertung und Risikoprognoze von im Portfolio enthaltenen Derivaten verwendet werden. Die meisten Bewertungsmodelle, insbesondere die in der Praxis häufig eingesetzten Modelle von Black und Black/Scholes zur Bewertung von Aktien- und Zinsoptionen, gehen aber von einem Random Walk der Underlyings aus.<sup>375</sup> Hinzu kommt, dass bei der Simulation die unterschiedlichen Portfoliowerte sich ausschließlich aus Änderungen der Risikofaktoren bei konstanter Menge der Vermögenspositionen ergeben. Die Effekte aus einer Verkürzung der Restlaufzeit von Derivaten können nicht erfasst werden, denn im Gegensatz zu den analytischen Value-at-Risk-Modellen besteht bei der Historischen Simulation nicht die Möglichkeit, das Theta-Risiko zu berücksichtigen. Das Theta ist die Rate, mit der sich der Wert des Portfolios im Zeitablauf ändert, wenn alle anderen Faktoren konstant bleiben.<sup>376</sup> Die Historische Simulation geht für ihre Risikoprognoze ebenfalls davon aus, dass der dem Risiko ausgesetzte Betrag im Zeitablauf konstant bleibt.<sup>377</sup>

In Ermangelung von allgemein akzeptierten Bewertungsmodellen ist die Anwendung der marktüblichen Optionsbewertungsmodelle in der Regel notwendig, um die in einem Portfolio enthaltenen Optionen zu bewerten und eine Risikoprognoze darüber zu erstellen, wie sich die Optionswerte ändern, wenn sich die Risikofaktoren verändern. In diesem Schritt müssen Renditen normalverteilt und durch einen Random Walk zu beschreiben sein. Gleichzeitig besteht die Argumentation für die Anwendung der Historischen Simulation aber gerade darin, dass die Renditen nicht normalverteilt sind und keinem Random Walk folgen. Der Value-at-

---

<sup>371</sup> Vgl. JORION, P.: *Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*, USA 1997, S. 301 f.

<sup>372</sup> Vgl. SCHÄFER, K.: *Optionsbewertung mit Monte-Carlo-Methoden*, Reihe: Quantitative Ökonomie, Band 52, Bergisch Gladbach 1994, S. 175.

<sup>373</sup> 250 Handelstage • 20 Jahre = 5.000 Veränderungen

<sup>374</sup> Vgl. DEUTSCH, H.-P.: *Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement*, 2. Auflage, Stuttgart 2001, S. 411.

<sup>375</sup> Vgl. HULL, J. C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*, 4. Auflage, München 2001, S. 338 ff., 748 ff.

<sup>376</sup> Vgl. HULL, J. C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*, 4. Auflage, München 2001, S. 452 und HUSCHENS, S.: *Value at Risk-Berechnung durch historische Simulation*, in: *Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren* Nr. 30/00, Technische Universität Dresden, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Dresden 2000, S. 9. Allerdings wird auch bei dem Varianz-Kovarianz-Ansatz in der Regel kein Theta berücksichtigt. Es könnte aber jederzeit über eine Taylor-Approximation eingefügt werden.

<sup>377</sup> Vgl. Kapitel XII.: Es kommt bei längeren Haltedauern durch den pull-to-par Effekt zu einer fehlerhaften Risikoprognoze. Der Fehler wächst mit der Länge der Haltedauer. Vgl. auch JORION, P.: *Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*, USA 1997, S. 223.

Risk-Ausweis für ein Portfolio folgt mit dem besonderen Hinweis, dass das Verfahren frei von Modellprämissen und Verteilungsannahmen ist. Der für einen Tag berechnete Value at Risk wird aber mit dem Wurzelgesetz auf eine längere Haltedauer skaliert. Hier widersprechen sich die Kritiker der Normalverteilungsannahme und des Varianz-Kovarianz-Ansatzes selbst.<sup>378</sup>

Festzustellen ist auch, dass die Historische Simulation nicht so einfach zu handhaben ist, wie es mitunter behauptet wird und es zunächst den Eindruck erweckt. Die Autoren Bühlér/Korn/Schmidt kommen aufgrund von eigenen Tests zu der Erkenntnis, dass die Historische Simulation bei einem kurzen historischen Beobachtungszeitraum verbunden mit einer langen Haltedauer von zehn Tagen kein geeignetes Verfahren ist.<sup>379</sup> Auch Brandt/Klein weisen der Historischen Simulation bei zehn Tagen Haltedauer falsche Risikoprophesien nach und beurteilen diesen Ansatz wegen seiner starken Abhängigkeit von Trends als „gefährlich“ in Kombination mit längeren Haltedauern.<sup>380</sup> Dieser sehr restriktiven Anwendung der Historischen Simulation auf maximal zehn Tage schließen sich die Autoren dieses Werks nicht an, jedoch existieren insbesondere für mittelfristige Prognosen qualitativ bessere Risikomodelle, wie das nächste Kapitel zur Monte-Carlo-Simulation zeigt. Mit immer komplexer werdenden Portfoliostrukturen, wachsenden Anteilen optionaler Produkte und erhöhten Anforderungen an die Prognosegüte der Modelle ist eine Wanderungsbewegung zu den mächtigeren Simulationsverfahren zu erwarten.

Allgemein wird insbesondere für die Betrachtung von langen Haltedauern davor gewarnt, den Value at Risk entgegen seiner kurzfristigen Orientierung „mit Gewalt“ auf eine langfristige Risikoprophesie auszudehnen.<sup>381</sup> Für die Haltedauer von einem Tag werden der Historischen Simulation jedoch zuverlässige Risikoprophesien bescheinigt.<sup>382</sup> Abschließend kann nach einer ausführlichen Diskussion der Kritik auf die wesentlichen Vorteile des Verfahrens eingegangen werden: Die Historische Simulation ist wegen ihres geringen mathematischen Anspruchs einfach umzusetzen. Der Portfolioansatz in Verbindung mit der Differenzenmethode erfordert nahezu keine statistischen und mathematischen Kenntnisse. Die Anwender müssen sich nicht mit der Messung von Volatilitäten und Korrelationen auseinandersetzen. Es werden auch keine Kenntnisse von Logarithmus, e-Funktion, Matrizenmultiplikation oder gar der Simulation von Zufallszahlen benötigt.

---

<sup>378</sup> Vgl. als Beispiel WEGNER, O.; SIEVI, C.; SCHUMACHER, M.: Szenarien der wertorientierten Steuerung des Zinsänderungsrisikos, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 03/2001, S. 140.

<sup>379</sup> Vgl. BÜHLER, W.; KORN, O.; SCHMIDT, A.: Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“ – eine empirische Studie zur Messung von Zins-, Währungs- und Optionsrisiken mit Value at Risk-Ansätzen, in: Die Betriebswirtschaft, 58. Jg. 1998, S. 79, 83.

<sup>380</sup> Vgl. BRANDT, CH.; KLEIN, S.P.: Value at Risk: Orientierungshilfen für die Wahl eines internen Modells, in: Schweizerische Gesellschaft für Finanzmarktforschung, 12. Jahrgang 1998, Nr. 3, S. 313.

<sup>381</sup> Vgl. WITTROCK, C.: Gesamtbanksteuerung auf Basis von Value at Risk – Ansätzen, in: Österreichisches Bank Archiv, Heft 12/96, S. 917.

<sup>382</sup> Vgl. BÜHLER, W.; KORN, O.; SCHMIDT, A.: Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“ – eine empirische Studie zur Messung von Zins-, Währungs- und Optionsrisiken mit Value at Risk-Ansätzen, in: Die Betriebswirtschaft, 58. Jg. 1998, S. 83.