



# RISIKO MANAGER

06 . 2015

[ KREDITRISIKO ] [ MARKTRISIKO ] [ LIQUIDITÄTSRISIKO ] [ OPRIK ] [ ERM ] [ REGULIERUNG ]



## Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 7)

# Lévyprozesse in der Portfoliokreditrisiko- modellierung

Die vorangegangenen Artikel unserer Serie „Risikomanagement mit Sprungprozessen“ haben die numerische Behandlung von Lévyprozessen zum effizienten Einsatz in Bewertungs- und Risikomanagementfragestellungen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Der aktuelle Beitrag zielt darauf ab, Anwendungsgebiete für die entwickelten Methoden im Bereich der Modellierung eines Portfolios an Kreditrisiken aufzuzeigen. Neben der Definition und den Eigenschaften von Kreditrisiko werden die Relevanz von Lévyprozessen und Evaluierungsansätze im Zusammenhang mit der quantitativen Bewertung hervorgehoben. Fokussierend auf die Modellierung einer hochdimensionalen Menge von Krediten wird das CIID-Rahmenwerk (CIID steht für conditionally independent and identically distributed) zur simultanen Modellierung aller Ausfallzeiten in einem Portfolio vorgestellt. Innerhalb dieses Rahmens werden effiziente numerische Verfahren, darunter eine Modifikation der Sattelpunktapproximationsmethode, zur Risikosteuerung aufgezeigt.

Fortsetzung auf Seite 7

### Inhalt

- 1, 7 Lévyprozesse in der Portfolio-kreditrisikomodellierung
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 12 BCBS #239 – Datenqualitätssicherung und Frühwarnung
- 17 Fotonachlese
- 22 Buchbesprechung
- 23 Personalien
- 24 Impressum
- 24 Produkte & Unternehmen

WWW.RISIKO-MANAGER.COM

Anzeige

**OpRisk  
Forum 2015**

THE INSTITUTE OF OPERATIONAL RISK   **RISIKO  
MANAGER**

20. bis 21. Mai 2015 in Bonn

Sponsor

**AON**

Information & Anmeldung:

Stefan Lödorf | Bank-Verlag GmbH  
Telefon: 0221/5490-133  
events@bank-verlag.de

Fortsetzung von Seite 1

### Was ist Kreditrisiko und wie hängt es mit Lévyprozessen zusammen?

Den Ausführungen der Bank for International Settlement [vgl. BIS 1999] folgend, bezeichnet Kreditrisiko die Gefahr, dass ein Schuldner den vereinbarten Zahlungsverpflichtungen nicht nachkommt. Eine umfangreiche Übersicht zu Kreditrisiko, damit verbundenen Derivaten und deren Bewertung findet sich in Schönbucher [vgl. Schönbucher 2003]. Aus der schlichten Definition lassen sich bereits einige Schlussfolgerungen ziehen, welche für die finanzmathematische Behandlung dieser Risikokomponente von grundlegender Bedeutung sind.

#### 1) Seltenheit

Die bilaterale Übereinkunft über einen festgeschriebenen Austausch von Zahlungen ist inhärent mit der festen Zuvorsicht beider Verhandlungspartner verbunden, den Vertragsverpflichtungen nachkommen zu können. In diesem Sinn stellt die Unfähigkeit einer Partei, eine fällige Zahlung zu leisten, ein nicht auszuschließendes, aber seltenes Ereignis dar. Für die mathematische Modellierung heißt das: Da die empirische Validierung eines Ansatzes aufgrund des Mangels an beobachtbaren Kreditereignisdaten in den allermeisten Fällen nicht oder nur rudimentär möglich ist, ist ein Verständnis um die Struktur und Sinnhaftigkeit des gewählten Modells von entscheidender Bedeutung. Beispielsweise kann ein hoher Grad an Komplexität im Gegensatz zur Aktienkursmodellierung im Allgemeinen nur aufgrund theoretischer Überlegungen gerechtfertigt werden.

#### 2) Unvorhersehbarkeit

Neben der Seltenheit kann auch die Unvorhersehbarkeit als wesentliche Eigenschaft von Kreditrisiko gelten. Üblicherweise reichen die am Markt verfügbaren Informationen nicht aus, die Verletzung von Zahlungsverpflichtungen durch den Verhandlungspartner zu antizipieren. Dies ist einerseits der Tatsache geschuldet, dass spezifisches Wissen über die Solvenz eines Schuldners nur begrenzt zur Verfügung steht. Andererseits können systemische Faktoren (man erinnere sich der Liquiditätsengpässe im Zuge der Finanzkrise)

eine einzelne Vertragspartei in unvorhersehbarer Weise beeinflussen.

#### 3) Signifikanz

Die Steuerung von Kreditrisiken zählt zum Kernverantwortungsbereich und damit zu den zentralen Aufgaben von Banken und anderen Finanzinstitutionen. Ein effektives Risikomanagement wird nicht ausschließlich durch die Vorgaben eines zentralen Regulierers erzwungen, sondern im Eigeninteresse eines jeden Finanzmarktakteurs bestmöglich umgesetzt.

Für die mathematische Beschreibung von Kreditrisiko haben diese Eigenschaften eine große Bedeutung: Die Signifikanz von potenziellen Zahlungsausfällen bedingt eine rigorose Quantifizierung der damit verbundenen Risiken. Die aufgestellten Modelle müssen zum einen in der Lage sein, beobachtete Muster vergangener (seltener) Kreditereignisse abzubilden, zum anderen eine intuitive Interpretation der Modellkomponenten ermöglichen. Nicht zuletzt stellt die Unvorhersehbarkeit von Kreditereignissen eine natürliche Motivation für die Verwendung von Lévyprozessen in der Modellierung dar. Während stetige stochastische Prozesse das plötzliche Auftreten von Zahlungsausfällen nur unzureichend nachbilden, können die Sprünge eines Lévyprozesses den abrupten Übergang eines Schuldners in die Insolvenz erfassen.

Dieser Artikel befasst sich mit der Modellierung der Ausfallzeiten in einem (hochdimensionalen) Portfolio von Krediten. Mathematisch gesehen wird eine Menge  $\tau_k, k=1, \dots, d$ , von  $d$  Zufallsvariablen betrachtet, wobei  $\tau_k$  den Ausfallzeitpunkt des  $k$ -ten Anlagegegenstands im gegebenen Portfolio darstellt. Für viele Kreditderivate – zum Beispiel Index Credit Default Swaps (Index CDS) oder die in der Finanzmarktkrise zu Bekanntheit gelangten Collateralized Debt Obligations (CDOs) – spielt die sich im Zeitverlauf akkumulierende Summe von Kreditereignissen und die einhergehende Ansammlung von Zahlungsausfällen die treibende Rolle bei der Bewertung. Geht man vereinfachend von einem

Portfolio mit identischen Nominalwerten für die einzelnen Positionen aus und unterstellt eine konstante Rückzahlungsrate (Marktkonsens sind üblicherweise 40 Prozent) der Schuldner bei Ausfall, wird das Auszahlungsprofil eines Kreditderivats im Wesentlichen von dem stochastischen Sprungprozess  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  (auch Portfolioverlustprozess genannt) bestimmt (vgl. ► Gleichung 01), welcher zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Anteil ausgefallener Positionen im Portfolio beschreibt. Während Index CDS vom (risikoneutralen) Erwartungswert von  $L_t$  für verschiedene Zeitpunkte  $t$  abhängen und damit eine Zerlegung (vgl. ► Gleichung 02) der Summe in die Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Positionen erlauben, stehen CDOs in nicht-linearem Zusammenhang mit  $\{L_t\}_{t \geq 0}$ . Es gilt daher, ein sinnhaftes mathematisches Modell für die Ausfallzeitpunkte zu finden, welches die Bestimmung der Verteilung einer Summe von Zufallsvariablen  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  ermöglicht.

### Wie kann der Portfolioverlustprozess modelliert werden?

Bei der Modellierung des Portfolioverlustprozesses  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  gibt es verschiedene Ansätze, die im Folgenden kurz erläutert werden sollen. Wie bereits angemahnt, stellt die mathematische „Handhabbarkeit“ des Prozesses eine kritische Voraussetzung für die Bestimmung der Verlustverteilung und damit der praktischen Anwendbarkeit dar. Um diese Voraussetzung zu erfüllen, greifen einige Arbeiten in der Literatur [siehe beispielsweise Giesecke et al. 2010 sowie Giesecke et al. 2013] auf Top-down-Ansätze zurück. Top-down bedeutet, dass der Prozess  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  direkt modelliert wird und steht im Gegensatz zum Bottom-up-Konzept, in welchem in einem ersten Schritt die Zufallsvariablen  $\tau_k$  bzw.  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  modelliert und erst in einem zweiten Schritt der daraus resul-

#### ► Gleichung 01

$$L_t := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

#### ► Gleichung 02

$$\mathbb{E}[L_t] = \frac{1}{d} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^d \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}} \right] = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}}] = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \mathbb{P}(\tau_k \leq t)$$

tierende Portfolioverlustprozess extrahiert wird. Der große Vorteil der Top-down-Philosophie besteht darin, dass die Dynamik von  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  sehr flexibel gestaltet und an beobachtete Phänomene angepasst werden kann, ohne die Handhabbarkeit und praktische Anwendbarkeit in der Kalibrierung an Marktdaten zu vernachlässigen. Die oben genannten Referenzen behandeln beispielsweise unter anderem den in der Finanzkrise offenkundigen Effekt, dass der Ausfall eines Kredits (das heißt ein Sprung von  $\{L_t\}_{t \geq 0}$ ) den Ausfall einer weiteren Position im Portfolio (das heißt einen weiteren Sprung des Prozesses) begünstigt. Nachteil des Top-down-Ansatzes im Sinn der im vorigen Abschnitt gelisteten grundlegenden Eigenschaften von Kreditrisiko (siehe Punkt 1) zu „Seltenheit“ ist, dass ein Rückschluss von der Modellierung von  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  auf die Struktur der einzelnen Ausfallzeitpunkte  $\tau_k$  in den allermeisten Fällen nicht möglich ist. Das Verständnis um die Struktur des Modells und die Abhängigkeit der Ausfallzeiten geht nicht explizit hervor und erschwert eine über die Güte der Marktpreisreproduktion hinausgehende Beurteilung der gewählten Prozessspezifikation.

Bei der Wahl eines Bottom-up-Ansatzes besteht umgekehrt die Herausforderung darin, die  $\tau_k$  so zu modellieren, dass eine realistische und handhabbare Dynamik für die aggregierte Summe  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  der Indikatorvariablen  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  entsteht. Der einfachste und für ein Verständnis um die generelle Funktionsweise hilfreiche Fall tritt ein, wenn die  $\tau_k$  als unabhängig und identisch verteilt (abgekürzt i. i. d. für independent and identically distributed) mit (risikoneutraler) Verteilungsfunktion  $F(t) := \mathbb{P}(\tau_1 \leq t)$  angenommen werden. In diesem Fall ist  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Trefferwahrscheinlichkeit  $F(t)$  (d. h.  $\mathbb{P}(1_{\{\tau_k \leq t\}} = 1) = F(t)$ ), sodass  $d \cdot L_t$  einer Binomialverteilung folgt. Die Wahrscheinlichkeit von  $l$  Ausfällen,  $l = 0, \dots, d$ , bis zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  kann somit geschlossen bestimmt werden, vgl. ► **Gleichung 03**.

Eine analytische Formel für die Portfolioverlustverteilung ist somit gegeben, jedoch wird ein wesentliches, für die Bewertung von Kreditderivaten extrem bedeutendes Merkmal ignoriert: die Ausfallkorrelation. Die Annahme unabhängiger Ausfallzeiten erscheint nur in den seltensten Fällen angebracht. Im Allgemeinen führen systemische Faktoren (wiederum sei die Finanzkrise als jüngstes Beispiel erwähnt) zu einer Abhängigkeit zwischen den Portfoliopositionen,

welche durch Ausfälle einzelner Posten womöglich sogar verstärkt wird. Um diesem unbestrittenen Zusammenhang Rechnung zu tragen, gibt es innerhalb der Bottom-up-Klasse verschiedene Ansätze, Wechselwirkungen zwischen den  $\tau_k$  zu berücksichtigen.

Ein in der univariaten Kreditrisikomodellierung (das heißt der Modellierung einer einzelnen Vermögensposition) gebräuchliches Verfahren sind intensitätsbasierte Modelle. In dieser Klasse wird  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  als Sprungprozess betrachtet, dessen Übergang vom anfänglichen Status  $1_{\{\tau_k \leq 0\}} = 0$  (das heißt die  $k$ -te Position im Portfolio ist zum Zeitpunkt  $t=0$  noch nicht ausgefallen) zum Ausfall  $1_{\{\tau_k \leq t\}} = 1$  für ein  $t > 0$  durch eine stochastische Ausfallintensität gesteuert wird. Je nach Spezifikation der Ausfallintensität können gewünschte Effekte abgebildet und Marktpreise für Kreditderivate nachgebildet werden. Die Herausforderung in der Anwendung dieses Rahmens im multivariaten Fall (das heißt für ein Portfolio von Objekten) besteht darin, Abhängigkeiten zwischen den Ausfallintensitäten der einzelnen Positionen herzustellen. Schönbucher [vgl. Schönbucher 2003, S. 316 ff.] illustriert die Schwierigkeiten und mögliche Lösungsansätze für die Aggregation der Ausfallintensitäten im Portfolioverlustprozess.

Einen weiteren populären Ansatz zur Modellierung von Wechselwirkungen zwischen den Ausfallzeiten bieten homogene Ein-Faktor-Modelle. Die Kritik des simplen Binomialansatzes aufgreifend, werden die Ausfallzeiten nicht mehr als i. i. d. angenommen. Stattdessen wird ein systemischer Faktor eingeführt, der alle Kreditpositionen gleichermaßen beeinträchtigt (man stelle sich darunter beispielsweise die allgemeine Wirtschaftslage vor). Da gegeben dem stochastischen gemeinsamen Faktor alle Ausfallzeiten als i. i. d. angenommen werden, werden diese Modelle auch CIID-Modelle (für conditionally i. i. d.) genannt. Um einen genaueren Einblick in die Ausführung eines der genannten Ansätze zur Portfoliokreditrisikomodellierung zu geben, wird die CIID-Klasse im folgenden Abschnitt näher beleuchtet.

### Eine kurze Einführung zu CIID-Modellen

Eine übersichtliche Einführung und ein Überblick über den CIID-Ansatz finden sich in Mai et al. [vgl. Mai et al. 2012]. Die kanonische Konstruktion der Ausfallzeiten in diesem Rahmenwerk ist durch ► **Gleichung 04** gegeben, wobei  $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$  einen nicht-negativen, steigenden stochastischen

#### ► Gleichung 03

$$\mathbb{P}(d L_t = l) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^d \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}} = l\right) = \binom{d}{l} F(t)^l (1 - F(t))^{d-l}$$

#### ► Gleichung 04

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0 : M_t \geq E_k\}, \quad k = 1, \dots, d$$

#### ► Gleichung 05

$$F_t := \mathbb{P}(\tau_k \leq t | M) = \mathbb{P}(E_k \leq M_t | M) = 1 - e^{-M_t}, \quad t \geq 0$$

#### ► Gleichung 06

$$\mathbb{P}(d L_t = l) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^d \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}} = l \mid M\right)\right] = \binom{d}{l} \mathbb{E}\left[(1 - e^{-M_t})^l (e^{-M_t})^{d-l}\right]$$

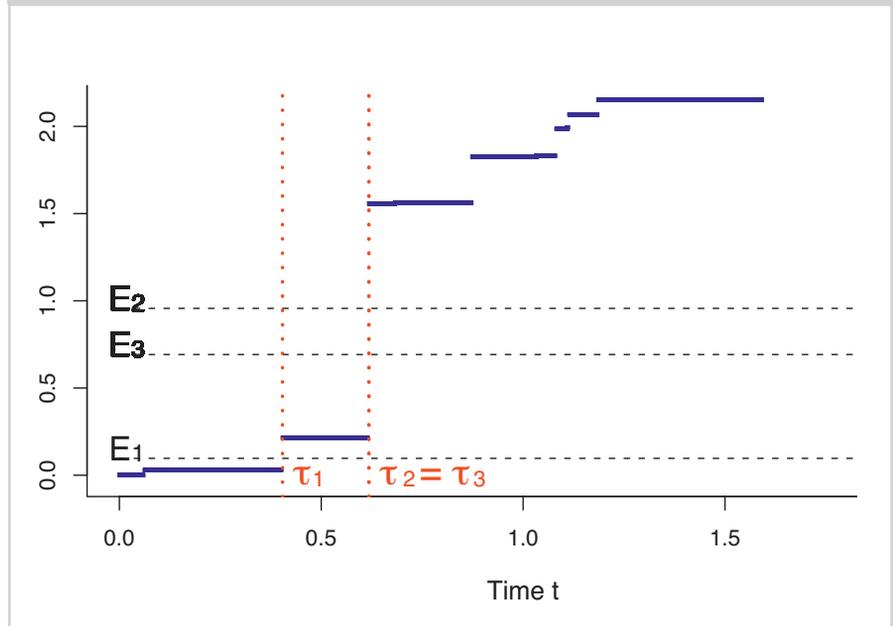
Prozess mit  $M_0=0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = \infty$  (fast sicher) und  $E_1, \dots, E_d$  eine Menge von i.i.d. exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 beschreiben, welche unabhängig von  $M$  sind. Wie bereits erwähnt, richtet sich die Bezeichnung „CIID“ danach, dass gegeben dem Marktfaktor  $M$  alle Ausfallzeiten i.i.d. sind. Je nach Spezifikation von  $M$  können unterschiedliche Strukturen für die  $\tau_k$  und den Portfolioverlustprozess  $\{L_t\}_{t \geq 0}$  induziert werden. Die Ausfallzeit  $\tau_k$  ist in diesem Setup der erste Zeitpunkt, zu dem der gemeinsame Marktprozess  $M$  die individuelle stochastische Schranke  $E_k$  überschreitet. Eine Visualisierung dieses Vorgangs ist in **Abb. 01** wiedergegeben.

Ein großer Vorteil von CIID-Modellen, welcher eine maßgebliche Rolle für deren Verbreitung in der Praxis spielt, ist die Handhabbarkeit der Portfolioverlustverteilung ähnlich dem Binomialfall. Gegeben  $M$  sind die  $\tau_k$  i.i.d. mit Verteilungsfunktion gemäß **Gleichung 05**. Für die Verteilung von  $L_t$  ergibt sich damit **Gleichung 06**.

Da die Indikatorfunktionen  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  bedingt an  $M$  i.i.d. Bernoulli-verteilt mit Trefferwahrscheinlichkeit  $1 - e^{-M_t}$  sind, erhält man für den Portfolioverlustprozess eine zum Unabhängigkeitsfall analoge Formel, welche von  $M$  abhängt. Diese Formel zeigt auch auf, wie steigende Lévyprozesse (auch Lévy-Subordinatoren genannt) in natürlicher Art und Weise als Kandidaten für die Spezifikation von  $M$  ins Spiel kommen. Um die Formel explizit lösen zu können, genügt es, Ausdrücke der Form  $\mathbb{E}[\exp(-M_t)]$  zu kennen. Da, wie in den vorangegangenen Beiträgen erläutert, die benötigten Ausdrücke nichts anderes als die Laplace-Transformation des Lévy-Subordinators darstellen und für die meisten Prozessspezifikationen bekannt sind, bleibt die explizite Struktur der Verlustverteilung aus dem Binomialfall erhalten.

Sind damit alle Barrieren hinsichtlich der Anwendbarkeit des Modells beseitigt? Leider nein. Eine analytisch nicht existente, jedoch bei numerischer Umsetzung des Ansatzes entstehende Schwierigkeit resultiert aus dem Binomialkoeffizienten „d über l“ in **Gleichung 06**. Während dieser für kleine Werte von  $d$  keine Probleme bereitet, wird er für größere Werte insofern problematisch, als die Multiplikation eines extrem großen Binomialkoeffizienten mit einem potenziell sehr kleinen Erwartungswert zu numerischen Instabilitäten führen kann. Gegeben der Tatsache, dass einige der Standardprodukte für Portfoliokreditderivate auf

**Abb. 01** Realisierung eines Zufallsvektors  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  in einem CIID-Modell. Die blaue Linie visualisiert den Pfad von  $M$ . Man beachte, dass der Sprung von  $M$  zum Zeitpunkt  $t=0.6$  den gleichzeitigen Ausfall von (d. h. den gleichen Wert für)  $\tau_2$  und  $\tau_3$  bedingt.



ein Portfolio von  $d=125$  Positionen referenzieren (und Kreditportfolios bei Banken im Allgemeinen eine hohe Dimension aufweisen), können bei „naiver“ Anwendung der Formel numerische Obskuritäten wie beispielsweise negative Wahrscheinlichkeiten oder Wahrscheinlichkeiten größer als eins auftreten. Ein Lösungsansatz für diese Problematik wird im nächsten Abschnitt erläutert.

**Wie kann die Portfolioverteilung im CIID-Rahmen effizient ausgewertet werden?**

Der letzte Abschnitt dieses Beitrags befasst sich mit der Fragestellung: Wie kann **Gleichung 06** für beliebige  $d$  effizient berechnet werden? Für kleine Werte ( $d < 30$ ) ist die Lösung bereits durch die Gleichung selbst gegeben. Eine direkte Berechnung bereitet in diesem Fall keine Probleme. Für sehr große Werte von  $d$  (das heißt für den Grenzfall  $d \rightarrow \infty$ ) stellt der CIID-Rahmen ebenfalls eine Lösung bereit. Wie in **Gleichung 01** definiert, stellt der

Portfolioverlustprozess eine Summe von Zufallsvariablen  $1_{\{\tau_k \leq t\}}$  dar. Für den Fall, dass diese Zufallsvariablen i.i.d. sind, zeigt das bekannte starke Gesetz der großen Zahlen auf, dass die normierte Summe der Zufalls-

**Gleichung 07**

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}}] = \mathbb{P}(\tau_k \leq t) = F(t)$$

**Gleichung 08**

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{d \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} |L_t - F_t| = 0\right) = 1$$

**Gleichung 09**

$$\mathbb{P}(d L_t = l) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(d L_t = l | M)]$$

**Gleichung 10**

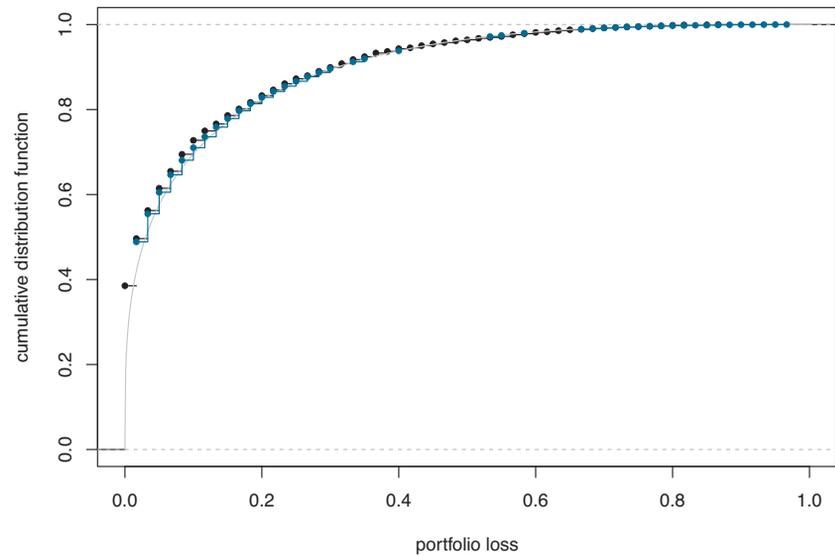
$$B_j(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \frac{(it)^j}{1 + it\lambda^{-1}} dt, \quad j \in \mathbb{N}, \lambda > 0$$

variablen gegen ihren Erwartungswert (siehe ► **Gleichung 07**) konvergiert. Für die CIID-Modelle kann ein ähnliches Resultat hergeleitet werden, da gegeben dem Marktfaktor  $M$  wiederum eine i. i. d.-Struktur besteht, welche die Anwendung von Grenzwertsätzen zulässt. Die daraus abgeleitete Approximationsformel wird in der Literatur als large homogeneous portfolio approximation (LHPA) bezeichnet und ergibt sich gemäß ► **Gleichung 08**.

Sprachlich ausgedrückt bedeutet dies: Für ein unendlich großes Portfolio kann in einem CIID-Modell die Verteilung des Portfolioverlustprozesses  $L_t$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  durch die Verteilung des Prozesses  $F_t = 1 - \exp(-M_t)$  approximiert werden. Da  $F_t$  für Lévyprozesse ein in der Regel gut handhabbares Objekt darstellt, kann die LHPA dazu genutzt werden, die ursprünglich hohe Komplexität (Bestimmung der Verteilung einer Summe von  $d$  abhängigen Zufallsvariablen) auf die Struktur eines eindimensionalen Prozesses  $M$  zurückzuführen.

Eine „Lücke“, die noch zu schließen verbleibt, ist eine Auswertung/Approximation von ► **Gleichung 06** für „mittlere“ Dimension  $d$ . Ein Ansatz hierfür, der wie die LHPA aus der Beziehung zur i. i. d.-Struktur resultiert, ist die Sattelpunktapproximationsmethode. Diese ursprünglich von Daniels [vgl. Daniels 1954] entwickelte Methodik kombiniert zwei mathematische Techniken: Auf der einen Seite werden Esscher-Transformationen dazu verwendet, einen zusätzlichen Freiheitsgrad für das bei der Betrachtung der Summe von Zufallsvariablen verwendete Wahrscheinlichkeitsmaß zu gewinnen. Auf der anderen Seite führt die Nutzung von Edgeworth Expansions zu einer Reduktion des numerischen Aufwands. In der Kombination beider Methoden ergibt sich eine Approximationsformel für die Verteilung der Summe, welche relative Fehlerabschätzungen gegenüber einer exakten Verteilung erlaubt. Eine genaue Herleitung

► **Abb. 02**  
Verteilung des Portfolioverlusts  $L_t$  für  $d=60$  und die Wahl eines Gamma Lévy-Subordinators für  $M$  (zur genauen Spezifikation von  $t$  und den Parametern von  $\{L_t\}_{t \geq 0}$ , siehe [Kant (2013), unterste Grafik in Figure 3.4]). Die Grafik zeigt die empirische Verteilungsfunktion von  $L_t$  basierend auf einer Monte-Carlo-Simulation (schwarze Linie), die Sattelpunktapproximationswerte (blaue Linie) und die stetige Verteilungsfunktion bei der LHPA (graue Linie).



► **Gleichung 11**

$$\alpha := \begin{cases} \frac{(1 - F_t)x}{F_t - x}, & x \leq F_t, \\ \frac{(1 - x)F_t}{x - F_t}, & x > F_t. \end{cases},$$

$$K_1 := \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \left( - \left| \log \left( \frac{x}{1-x} \frac{1-F_t}{F_t} \right) \right|^{-1} + \alpha \right),$$

$$K_2 := \frac{1}{x(1-x)} \left( \alpha \left( \frac{1}{2} - \left| \log \left( \frac{x}{1-x} \frac{1-F_t}{F_t} \right) \right|^{-1} \right) + \alpha^2 \right),$$

$$\lambda := \sqrt{d} \left| \log \left( \frac{x}{1-x} \frac{1-F_t}{F_t} \right) \right| \sqrt{x(1-x)}$$

► **Gleichung 12**

$$\mathbb{P} \left( L_t \geq x \mid M \right) \mathbf{1}_{\{x > F_t\}} + \mathbb{P} \left( L_t \leq x \mid M \right) \mathbf{1}_{\{x < F_t\}} \approx$$

$$\frac{F_t^l (1 - F_t)^{d-l}}{1 - \left( \frac{1-x}{x} \frac{F_t}{1-F_t} \right)^{\text{sgn}(x-F_t)}} \frac{d^{d+\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}} (d-l)^{d-l+\frac{1}{2}}} \left\{ B_0(\lambda) - \frac{K_1}{\sqrt{d}} B_1(\lambda) + \frac{(1-2x) \text{sgn}(x-F_t)}{6\sqrt{dx(1-x)}} B_3(\lambda) \right.$$

$$\left. - K_1 \frac{(1-2x) \text{sgn}(x-F_t)}{6d\sqrt{x(1-x)}} B_4(\lambda) + \frac{K_2}{d} B_2(\lambda) + \frac{1-6x+6x^2}{24dx(1-x)} B_4(\lambda) + \frac{1-4x+4x^2}{72dx(1-x)} B_6(\lambda) \right\}$$

und Übertragung der Sattelpunktapproximationsmethode auf das CIID-Setup findet sich in Kant [vgl. Kant 2013]. Basierend auf der Darstellung gemäß ► Gleichung 09 der Verteilung von  $L_l$  als bedingter Erwartungswert gegeben dem Marktfaktor  $M$  wird gezeigt, dass bei Definition der Esscher-Funktionen (vgl. ► Gleichung 10) und von ► Gleichung 11 der Ausdruck im Inneren von ► Gleichung 09 berechnet werden kann mittels ► Gleichung 12 für  $x=l/d, l=0, \dots, d$ , wobei  $\text{sgn}$  die Signumsfunktion bezeichnet. Ein Beispiel für die Anwendung der Approximationsmethode und die daraus resultierende Näherung für die Verteilungsfunktion von  $L_l$  ist in ► Abb. 02 dargestellt. □

### Fazit

Dieser Beitrag unserer Risikomanagement-Serie hat kritische Aspekte, die bei der Modellierung von Kreditrisiken auf Portfolioebene berücksichtigt werden sollten, aufgezeigt und einen Überblick über verschiedene gängige Ansätze in Literatur und Praxis gegeben. Exemplarisch wurde innerhalb des CIID-Rahmens aufgezeigt, wie die Verteilung der für viele Bewertungen zentralen

Größe – dem Portfolioverlustprozess – abgeleitet werden kann und welche Herausforderungen numerischer Natur auftreten. Zur Bestimmung der Verlustverteilung für unterschiedlich große Portfolios wurden einige Ansätze, darunter die Sattelpunktapproximationsmethode, vorgestellt.

### Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

**Bank for International Settlement (1999):** *Principles for the Management of Credit Risk - consultative document.* URL: <http://www.bis.org/publ/bcb54.htm>, Accessed on February 4, 2015.

**Daniels, H. E. (1954):** *Saddlepoint approximations in statistics. The Annals of Mathematical Statistics, 25(4), pp. 631–650.*

**Giesecke, K./Goldberg, L./Errais, E. (2010):** *Affine point processes and portfolio credit risk. SIAM Journal on Financial Mathematics, 1, pp. 642-665.*

**Giesecke, K./Spiliopoulos, K./Sowers, R. (2013):** *Default clustering in large portfolios: typical events. The Annals of Applied Probability 23(1), pp. 348-385.*

**Kant, B. (2013):** *Saddlepoint approximation in portfolio default models with conditionally independent and identically distributed (CIID) default times. Master's thesis, Technische Universität München.*

**Mai, J.-F./Scherer, M./Zagst, R. (2012):** *CIID frailty models and implied copulas. In: Copulae in Mathematical and Quantitative Finance, Proceedings of the Workshop Held in Cracow, 10-11 July 2012. Springer Verlag, pp. 201-230.*

**Schönbucher, P. J. (2003):** *Credit Derivatives Pricing Models – Models, Pricing and Implementation. Wiley Finance.*

### Die Autoren:

**Benjamin Kant** ist Financial Engineer bei dem im Bereich Financial Services spezialisierten Beratungsunternehmen Finbridge. Sein akademischer Themenschwerpunkt liegt im Bereich der Kreditrisikomodellierung.

**Steffen Schenk** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Im Rahmen des KPMG Center of Excellence in Risk Management widmet er sich aktuellen Fragestellungen des modernen Risikomanagements.

*Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches die Stelle von Steffen Schenk finanziert wird.*

Anzeige

## Fachbücher für Risikomanagement-Profis:



Niehoff | Hirschmann (Hrsg.)

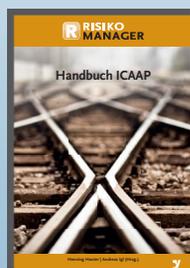
### Brennpunkt Risikomanagement und Regulierung

ISBN 978-3-86556-438-2

Art.-Nr. 22.515-1500

360 Seiten, gebunden

69,00 Euro



Heuter | Igl (Hrsg.)

### Handbuch ICAAP

ISBN 978-3-86556-428-3

Art.-Nr. 22.511-1500

256 Seiten, gebunden

ca. 59,00 Euro

Weitere Fachbücher in unserem Shop:  
[www.bank-verlag-shop.de](http://www.bank-verlag-shop.de)

